



Formulário

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \vec{F}_e = q\vec{E}, \quad \vec{E} = k_0 \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}^S}{\epsilon_0}, \quad \vec{E} = -\nabla V, \quad V = k_0 \frac{q}{r},$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad U = k_0 \frac{qq'}{r}, \quad U = qV, \quad W = -\Delta U, \quad Q = CV, \quad U = \frac{1}{2} CV^2,$$

$$C = KC_0, \quad V = RI, \quad P = VI, \quad \vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

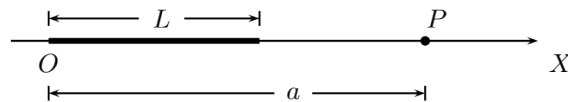
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}, \quad I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{J} = nq\vec{v}, \quad \vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}, \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}^S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E^S}{dt},$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}^c = -\frac{d\Phi_B^S}{dt}, \quad \vec{\mu} = IA \hat{n}, \quad \int \frac{x dx}{(x+u)^2} = \frac{u}{x+u} + \ln|x+u| + \text{const}$$

Questões discursivas (4 × 2,5 = 10,0 pontos)

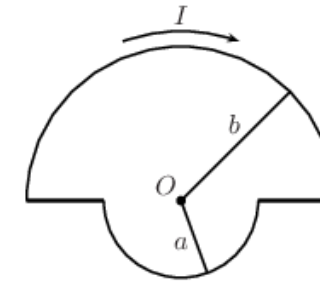
Todas as respostas devem ser cuidadosamente justificadas!

1. **(2,5 pontos)** Considere uma barra fina, retilínea e isolante, de comprimento L , disposta sobre o eixo X de um sistema de coordenadas com uma de suas extremidades sobre a origem, como mostra a figura abaixo. Ela encontra-se carregada com uma densidade linear de carga estacionária, mas não-uniforme dada por $\lambda(x) = \lambda_0(x/L)$, onde λ_0 é uma constante positiva.

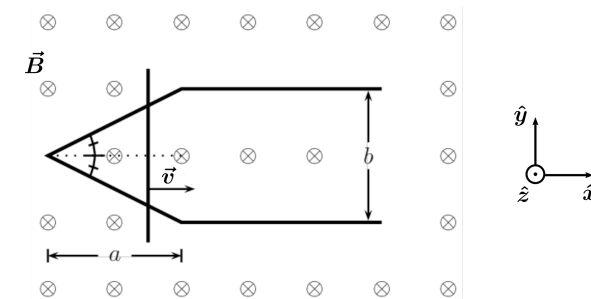


- (a) Determine a carga total da barra. **(1,0 ponto)**
 (b) Determine o vetor campo elétrico em um ponto P sobre o eixo X , localizado a uma distância a ($a > L$) da extremidade da barra que está sobre a origem O . **(1,5 ponto)**
2. **(2,5 pontos)** Um plano infinito é posicionado sobre o plano XY de um sistema de coordenadas. Ele encontra-se carregado com uma densidade superficial de carga constante $\sigma > 0$.
- (a) Sabendo que o campo elétrico produzido pelo plano em um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer do espaço tem a forma $\vec{E}(P) = E_z(z)\hat{z}$, utilize a lei de Gauss para determinar $E_z(z)$, considerando as regiões $z > 0$ e $z < 0$. **(1,5 ponto)**
 (b) Determine o potencial elétrico produzido pelo plano no ponto P , considerando as mesmas regiões acima. Considere que o potencial é nulo sobre o próprio plano. **(1,0 ponto)**

3. **(2,5 pontos)** Considere a espira condutora mostrada na figura abaixo. Ela é formada pela junção de dois trechos semicirculares de raios a e $b > a$ com dois trechos retilíneos e conduz uma corrente estacionária de intensidade I no sentido indicado.



- (a) Determine o vetor momento de dipolo magnético da espira. **(1,0 ponto)**
 (b) Deduza, em detalhe, uma expressão para o vetor campo magnético produzido pela espira no ponto O , que corresponde ao centro comum dos trechos semicirculares. **(1,5 ponto)**
4. **(2,5 pontos)** Uma barra condutora fina se move com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{x}$ ($v > 0$) sobre um par de trilhos condutores finos, como mostrado na figura abaixo. O trecho em que os trilhos estão angulados tem um comprimento horizontal a e a separação entre os trilhos no trecho em que eles são paralelos vale b . No instante $t = 0$, a barra se encontra no ponto onde os trilhos se encontram. O atrito entre os trilhos e a barra é desprezível e todo o sistema está imerso em uma região de campo magnético constante $\vec{B} = -B\hat{z}$ ($B > 0$).



- (a) Determine o módulo do fluxo de campo magnético através da área definida pelos trilhos e a barra como função do tempo t , considerando os intervalos (i) $0 < t \leq a/v$ e (ii) $t > a/v$. *Sugestão:* Para o intervalo (i), utilize uma semelhança de triângulos para obter uma relação entre a porção de comprimento da barra dentro do circuito e o seu deslocamento horizontal. **(1,0 ponto)**
 (b) Determine o módulo e o sentido da força eletromotriz induzida no sistema como função do tempo t , considerando os mesmos intervalos. **(0,9 ponto)**
 (c) Esboce os gráficos dos módulos do fluxo e da força eletromotriz induzida como função de t , destacando os valores relevantes. **(0,6 ponto)**

Gabarito

Questões discursivas (4 × 2,5 = 10,0 pontos)

1. Resolução:

(a) Considere um segmento de comprimento infinitesimal dx da barra, localizado a uma distância $x > 0$ da extremidade que está sobre a origem. A carga infinitesimal contida neste segmento é dada por $dq = \lambda(x)dx = \lambda_0(x/L)dx$. Com isso, a carga total da barra é dada por:

$$Q = \int_{barra} dq = \int_0^L \lambda_0 \frac{x}{L} dx \rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{2} \lambda_0 L}$$

■

(b) Considere o mesmo elemento de carga infinitesimal do item anterior. Como este elemento se encontra a uma distância $r = a - x$ do ponto P , o campo elétrico produzido por ele neste ponto é dado por:

$$d\vec{E} = k_0 \frac{dq}{r^2} \hat{r} = k_0 \frac{\lambda_0(x/L)dx}{(a-x)^2} \hat{x}$$

Pelo princípio da superposição, o campo elétrico resultante em P será dado pela soma vetorial de todas as contribuições infinitesimais. Assim:

$$\vec{E} = \int_{barra} d\vec{E} = \frac{k_0 \lambda_0}{L} \hat{x} \int_0^L \frac{x dx}{(a-x)^2}$$

Utilizando a integral fornecida no formulário, obtemos:

$$\vec{E} = \frac{k_0 \lambda_0}{L} \hat{x} \left[\frac{a}{a-L} - 1 + \ln \left(\frac{a-L}{a} \right) \right]$$

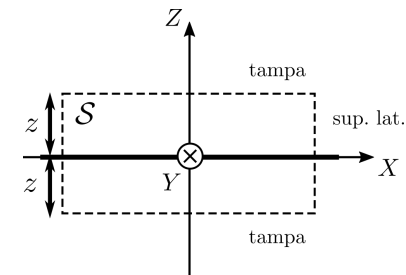
Simplificando, obtemos finalmente:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k_0 \lambda_0}{L} \left[\frac{L}{a-L} + \ln \left(\frac{a-L}{a} \right) \right] \hat{x}}$$

■

2. Resolução:

(a) O enunciado já informa a forma do campo elétrico produzido pelo plano. Note ainda que o problema possui simetria de reflexão com relação ao plano XY , de forma que $E_z(-z) = -E_z(z)$. Para explorar esta forma do campo, podemos escolher uma superfície gaussiana \mathcal{S} na forma de caixa, com tampas de área A paralelas ao plano XY e posicionadas de forma simétrica com relação a este plano, como mostrado na vista de corte da figura abaixo. O fluxo de campo elétrico através de \mathcal{S} é dado por:



$$\Phi_E^{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{tampas} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{sup.lat.} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Como o vetor normal à superfície lateral da caixa é paralelo ao plano XY e o campo aponta ao longo do eixo Z , vemos que $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ em todos os pontos dessa superfície e o fluxo através dela será nulo. Com isso:

$$\Phi_E^{\mathcal{S}} = \int_{tampas} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Podemos agora explorar a simetria de reflexão com relação ao plano XY e notar que os fluxos sobre as duas tampas serão iguais. Com isso, podemos integrar apenas sobre a tampa superior ($z > 0$):

$$\begin{aligned} \Phi_E^{\mathcal{S}} &= 2 \int_{tampa\ sup.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \\ &= 2 \int_{tampa\ sup.} E_z(z) \hat{z} \cdot dA \hat{z} = \\ &= 2 \int_{tampa\ sup.} E_z(z) dA = \\ &= 2E_z(z) \int_{tampa\ sup.} dA = \\ &= 2E_z(z)A, \end{aligned}$$

onde utilizamos que $E_z(z)$ é constante sobre a tampa superior, uma vez que todos os pontos dela se encontram a uma mesma distância z do plano de cargas.

Finalmente, como a carga está uniformemente distribuída sobre o plano de cargas, vemos que a carga total no interior de \mathcal{S} é igual à $Q_{int}^{\mathcal{S}} = \sigma A$. Com isso, a lei de Gauss dá:

$$\begin{aligned} \Phi_E^{\mathcal{S}} &= \frac{Q_{int}^{\mathcal{S}}}{\epsilon_0} \\ 2E_z(z)A &= \sigma A \end{aligned}$$

$$\boxed{E_z(z) = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad z > 0}$$

e a simetria de reflexão dá:

$$\boxed{E_z(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad z < 0}$$

(b) Como já conhecemos o campo elétrico produzido pelo plano em todo o espaço, podemos integrá-lo para obter o potencial. A diferença de potencial entre dois pontos a e b quaisquer é dada por:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

onde a integral não depende do caminho escolhido. Pela simetria de translação ao longo dos eixos X e Y , vemos que o potencial pode depender apenas de z , de forma que $V = V(z)$. Escolhendo o ponto a como sendo um ponto $(x', y', 0)$ sobre o plano de cargas, e o ponto b como sendo o ponto $P = (x, y, z)$ onde desejamos calcular o potencial, temos:

$$V(0) - V(z) = \int_{(x', y', 0)}^{(x, y, z)} \left(\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \right) \cdot d\vec{l},$$

onde o sinal positivo se aplica para $z > 0$ e o negativo para $z < 0$. Para um caminho qualquer, temos que $d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$, de forma que $\hat{z} \cdot d\vec{l} = dz$. Com isso, temos que:

$$V(0) - V(z) = \int_0^z \left(\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) dz = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz = \pm \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}.$$

Podemos agrupar os dois sinais acima notando que $|z| = +z$ para $z > 0$ e $|z| = -z$ para $z < 0$. Notando ainda que $V(0) = 0$, obtemos, finalmente:

$$V(z) = -\frac{\sigma|z|}{2\epsilon_0}.$$

Note que o potencial é máximo sobre o próprio plano de cargas, como esperado, uma vez que o campo elétrico aponta para fora dele.

3. Resolução:

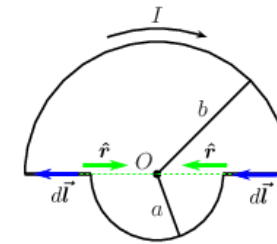
(a) O módulo do momento de dipolo magnético da espira é dado pelo produto da corrente por sua área. Assim:

$$\mu = IA = I \left(\frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi b^2}{2} \right)$$

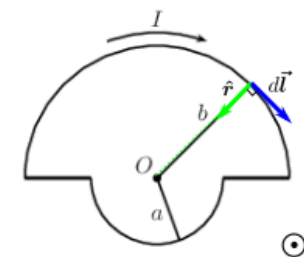
$$\mu = \frac{\pi I}{2} (a^2 + b^2).$$

A direção e sentido do vetor são dados pela regra da mão direita a partir do sentido da corrente. Como a corrente tem sentido horário, vemos que o momento de dipolo **deve apontar para dentro do plano da página**.

(b) Vamos calcular a contribuição de cada trecho para o campo magnético resultante no ponto O . Para os trechos retilíneos, vemos na figura abaixo que o elemento de comprimento infinitesimal $d\vec{l}$ e o unitário \hat{r} da direção que liga este elemento ao ponto O possuem sempre a mesma direção, de forma que o produto vetorial $d\vec{l} \times \hat{r}$ é nulo para todos os elementos sobre esses trechos. Com isso, vemos que esses trechos não contribuem para o campo magnético resultante no ponto O .



Vamos analisar agora os trechos semicirculares, começando pelo de raio b . A figura abaixo mostra um elemento de comprimento infinitesimal $d\vec{l}$ deste trecho e o unitário \hat{r} correspondente. Pela lei de Biot-Savart, sua contribuição para o campo magnético em um ponto qualquer do espaço é dada por:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2},$$

Pela figura, vemos que $r = b$ para todos os elementos de comprimento deste trecho. Vemos ainda que $d\vec{l} \times \hat{r} = -|d\vec{l}||\hat{r}| \sin 90^\circ (-\hat{z}) = -dl \hat{z}$, onde \hat{z} é um unitário que aponta para fora do plano da página. Assim:

$$d\vec{B}_b = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \hat{z}}{b^2},$$

Para obter o campo total, basta integrar sobre este trecho. Obtemos então:

$$\vec{B}_b = \int_b d\vec{B}_b = -\int_b \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \hat{z}}{b^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b^2} \hat{z} \int_b dl = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b^2} \hat{z} \pi b.$$

Portanto:

$$\vec{B}_b = -\frac{\mu_0 I}{4b} \hat{z}.$$

De forma análoga, vemos que a contribuição do trecho semicircular de raio a para o campo magnético no ponto O será dada por:

$$\vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I}{4a} \hat{z},$$

uma vez que o produto vetorial $d\vec{l} \times \hat{r}$ tem a mesma direção e sentido do caso anterior e todos os elementos de comprimento se encontram a uma mesma distância a do ponto O .

Com isso, aplicando o princípio da superposição, temos que o campo resultante no ponto O é dado por:

$$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b = -\frac{\mu_0 I(a+b)}{4ab} \hat{z}.$$

■

4. Resolução:

Como o campo magnético é constante, o fluxo sobre a área definida pelos trilhos e a barra em um instante $t > 0$ vale:

$$\Phi_B(t) = \int_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A}(t) = BA(t),$$

onde $A(t)$ é a área definida por este circuito no instante t e orientamos o vetor área no mesmo sentido de \vec{B} ($\vec{A}(t) = A(t)\hat{n} = -A(t)\hat{z}$).

Seja $x(t)$ a posição horizontal da barra medida a partir do ponto de encontro dos trilhos, de forma que $x(0) = 0$ e $x(t) = vt$. Durante o intervalo $0 < t < a/v$, a barra se move sobre o trecho angulado dos trilhos. Neste intervalo, a porção de comprimento da barra efetivamente sobre o circuito varia e podemos designá-la por $y(t)$. Notando que o triângulo de lado b e altura a é semelhante ao de lado $y(t)$ e altura $x(t)$, temos que:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b}{a} \rightarrow y(t) = \frac{b}{a}x(t)$$

Com isso, o fluxo neste intervalo vale:

$$\Phi_B(t) = BA(t) = B \frac{1}{2}x(t)y(t) = \frac{b}{2a}B[x(t)]^2$$

$$\Phi_B(t) = \frac{bBv^2t^2}{2a}, \quad 0 < t < a/v$$

No intervalo $t > a/v$, a barra se move sobre o trecho em que os trilhos são paralelos, de forma que a porção de comprimento da barra sobre o circuito é constante e vale b . Nesse caso, a área total $A(t)$ é a soma da área do triângulo de lado b e altura a , que permanece constante, com a área de um retângulo de lados b e $x(t) - a$. Assim, o fluxo total vale:

$$\Phi_B(t) = BA(t) = B \left[\frac{1}{2}ab + (x(t) - a)b \right]$$

$$\Phi_B(t) = bB \left(vt - \frac{a}{2} \right), \quad t \geq a/v$$

■

(b) Pela lei de Faraday, temos que a f.e.m. induzida é dada por:

$$\mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Aplicando a expressão acima para cada intervalo, temos que:

(i) $0 < t < a/v$:

$$\mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{bBv^2t^2}{2a} \right) \rightarrow \mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{bBv^2t}{a}$$

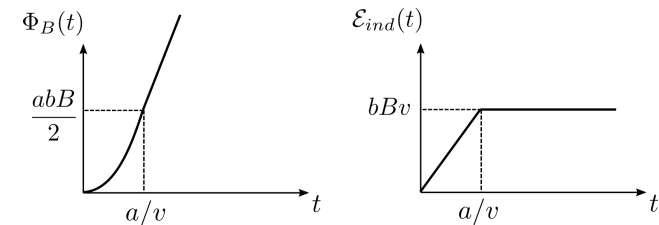
(ii) $t \geq a/v$:

$$\mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{d}{dt} \left[bB \left(vt - \frac{a}{2} \right) \right] \rightarrow \mathcal{E}_{ind}(t) = -bBv$$

O sinal negativo nas expressões acima nos diz que a f.e.m. deve ter sentido contrário ao definido como positivo a partir do vetor área. Como escolhemos este vetor área apontando para dentro do plano do papel, temos que o sentido positivo é o horário, de forma que a f.e.m. deve ter **sentido anti-horário** para qualquer valor de t . A mesma conclusão pode ser obtida a partir da lei de Lenz.

■

(c) Os gráficos são mostrados abaixo. O aluno deve destacar o instante $t = a/v$ e identificar o valor de cada quantidade neste instante. Além disso, o aluno deve deixar claro o comportamento funcional de cada quantidade nos intervalos $0 < t < a/v$ e $t \geq a/v$ e a continuidade de todas as quantidades em $t = a/v$.



■