Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2017/1 – Primeira Prova: 17/04/2017
Versão: $\boxed{\text{A}}$

Formulário

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm e} = q\vec{\boldsymbol{E}}\,, \quad \vec{\boldsymbol{E}} = k_0\,\frac{q}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} \quad \left(k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right), \quad \oint_S \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\rm int}}{\varepsilon_0}\,, \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V\,, \quad V = k_0\,\frac{q}{r}\,, \quad U = k_0\,\frac{qq'}{r}\,,$$

$$C = Q/V\,, \quad U = \frac{1}{2}QV\,, \quad u_E = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2\,, \quad (1+x)^n \approx 1 + nx \quad n, x \in \mathbb{R}\ \ e\ \ |x| \ll 1$$

Seção 1. Falso ou Verdadeiro (10×0,3 = 3,0 pontos)

Indique com **V** se a afirmação é verdadeira, ou **F**, se falsa. Note que há a seguinte **PENALIZAÇÃO: cada questão erradamente indicada corresponderá a uma diminuição de 0,2 ponto da nota do estudante obtida nesta seção. Caso não queira correr o risco de penalização, deixe a resposta em branco!**

______ Aproxima-se uma partícula carregada de uma esfera condutora neutra e isolada. Após restabelecido o equilíbrio eletrostático, a força eletrostática resultante sobre a esfera é nula, já que o campo eletrostático em qualquer ponto no interior da esfera é nulo.

______ Um capacitor ideal, originalmente vazio, de placas quadradas, paralelas, tem suas arestas duplicadas, mantendo-se a distância entre as placas constante. Ainda que preenchamos tal capacitor com um material isolante qualquer, é impossível fazer a nova capacitância igual à antiga.

______ Em um condutor em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos de seu interior.

______ Se o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada for zero, então não há partículas carregadas na região interior à superfície.

______ De acordo com o princípio da superposição, o campo eletrostático criado por um sistema de N partículas carregadas em um ponto de uma superfície fechada é dado pela soma vetorial apenas dos campos das cargas que estiverem dentro dessa superfície.

______ O campo eletrostático em qualquer ponto de uma superfície equipotencial tem sempre o mesmo módulo, já que ele é sempre perpendicular a essa superfície.

______ Se um capacitor é mantido isolado enquanto um material dielétrico é inserido em seu interior, sua energia armazenada diminui.

______ Um dipolo elétrico, formado por partículas de cargas q ($q > 0$) e $-q$, separadas por uma distância fixa d, encontra-se em uma região onde há um campo eletrostático uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$. Inicialmente o seu momento de dipolo aponta na mesma direção e no mesmo sentido que o campo. O dipolo é girado de 180^0 até ficar antiparalelo ao campo (mesma direção que $\vec{\boldsymbol{E}}$, mas sentido oposto). O trabalho realizado pelas forças eletrostáticas sobre o dipolo, nesse processo, foi positivo.

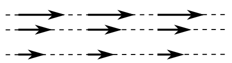
______ Duas linhas de campo elétrico nunca podem se cruzar.

______ A lei de Gauss só é válida para distribuições de carga com algum tipo de simetria.

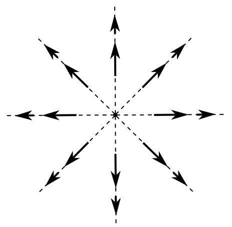
Seção 2. Múltipla escolha (4×0,7 = 2,8 pontos)

1. Considere os seguintes três campos vetoriais em certas regiões do espaço (as setas representam os campos, em diferentes pontos, e as curvas tracejadas, suas correspondentes linhas de campo):

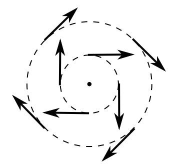
(I)



(II)



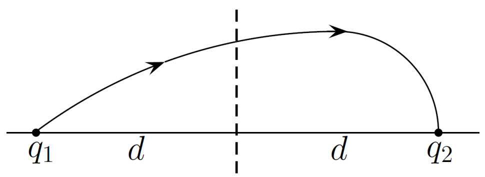
(III)



Indique a opção que melhor assinala, desses campos, aquele(s) que, de fato, **não** pode(m) ser campo(s) eletrostático(s). [Sugestão: um campo eletrostático tem de ser conservativo].

(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) I e II.
(e) I e III.
(f) II e III.
(g) I, II e III.
(h) Nenhum deles.

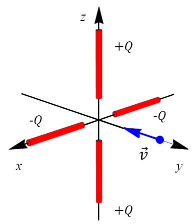
2. A figura mostra um sistema formado por partículas carregadas com cargas q_1 e q_2 e uma das linhas de campo que sai de q_1 e chega em q_2. A reta tracejada é perpendicular à reta que passa pelas cargas e estas estão à mesma distância d da reta tracejada.



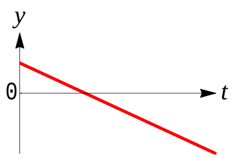
A partir do desenho, podemos afirmar que

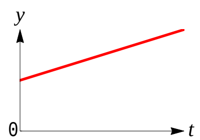
(a) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e que $|q_1| < |q_2|$;
(b) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e que $|q_1| > |q_2|$;
(c) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e seus módulos são iguais;
(d) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ e que $|q_1| < |q_2|$;
(e) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ e que $|q_1| > |q_2|$;

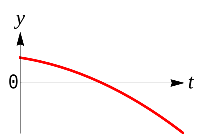
3. Quatro fios finos de mesmo comprimento estão dispostos no plano xz simetricamente em torno da origem, como mostrado na figura abaixo. Cada um dos fios dispostos ao longo do eixo z possui uma carga $Q > 0$, estacionária e uniformemente distribuída. Já os fios dispostos ao longo do eixo x possuem, cada um, uma carga $-Q$, também estacionária e uniformemente distribuída.

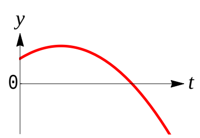


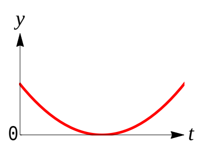
No instante de tempo $t = 0$ uma partícula de carga $q > 0$ encontra-se sobre o eixo y, deslocando-se com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}} = -v\hat{\boldsymbol{y}}$ $(v > 0)$. Dentre os gráficos abaixo, qual deles descreve o movimento subsequente da partícula?

(a)


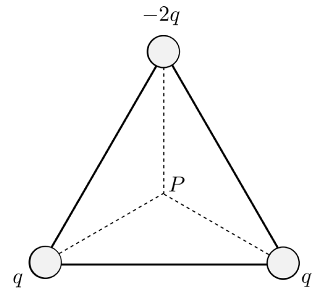
(b)


(c)


(d)


(e)


4. Três partículas carregadas com cargas q, q e $-2q$ $(q > 0)$ são fixadas sobre os vértices de um triângulo equilátero, como mostrado na figura abaixo. O centro do triângulo é indicado pelo ponto P.



Considere que a energia potencial elétrica seja nula quando as cargas estiverem infinitamente afastadas. Sobre esse sistema, são feitas as afirmativas abaixo:

(I) A energia potential elétrica do sistema é negativa.
(II) O potencial elétrico é constante sobre um eixo perpendicular ao triângulo e que passa por P.
(III) O trabalho realizado pela força elétrica sobre uma partícula carregada, quando ela é deslocada do infinito até o ponto P, é nulo.

São VERDADEIRAS as afirmativas:

(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) I e II.
(e) I e III.
(f) II e III.
(g) I, II e III.
(h) Nenhuma delas.

Seção 3. Questões discursivas (1×2,4 + 1 × 1,8 = 4,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,4 pontos]
Considere uma esfera isolante de raio R carregada com a densidade volumar de carga $\rho(r) = Cr^2$, sendo C uma constante e r a distância de um ponto genérico ao centro da esfera. Considere também uma barra de comprimento L e densidade linear de carga constante λ. A barra está orientada para o centro da esfera e o seu ponto médio está a uma distância a do centro da esfera, sendo $a - L/2 > R$, como mostrado na Figura 1.
(a) Determine a carga Q da esfera. [0,6 ponto]
(b) Utilizando a lei de Gauss, calcule o campo eletrostático (módulo, direção e sentido) produzido apenas pela esfera, num ponto $\mathscr{P}$, situado a uma distância r do centro da esfera, tal que $r > R$. [0,6 ponto]
(c) Calcule a força eletrostática (módulo, direção e sentido) exercida pela esfera sobre a haste. [0,8 ponto]
(d) Obtenha uma expressão aproximada para a força exercida pela esfera sobre a haste para $a \gg L$ e discuta o resultado encontrado. [0,4 ponto]

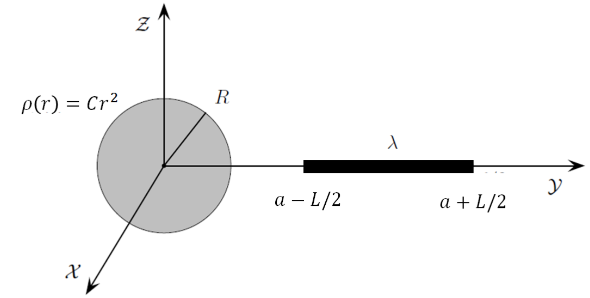


Figura 1: Questão discursiva 1.

2. [1,8 pontos]
Um capacitor é formado por duas placas condutoras planas e paralelas de área A cada uma, separadas por uma distância d muito menor que as suas dimensões. Um material isolante de constante dielétrica K é inserido no capacitor de forma a ocupar metade do volume entre as placas, como mostrado na Figura 2, ficando completamente em contato com uma delas, enquanto a outra metade permanece no vácuo. A seguir, uma diferença de potencial V é aplicada entre as placas. Em termos de ϵ_o, A, V, K e d, determine para esse sistema:
(a) A capacitância C do sistema. [0,8 ponto]
(b) Os módulos do campo elétrico na metade vazia (E_v) e na metade com dielétrico (E_d). [1,0 ponto]

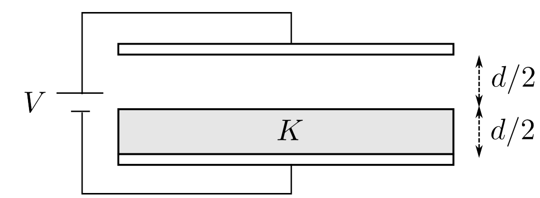


Figura 2: Questão discursiva 2.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{A}}$

Seção 1. Falso ou Verdadeiro (10×0,3 = 3,0 pontos)

__F__ Aproxima-se uma partícula carregada de uma esfera condutora neutra e isolada. Após restabelecido o equilíbrio eletrostático, a força eletrostática resultante sobre a esfera é nula, já que o campo eletrostático em qualquer ponto no interior da esfera é nulo.

__V__ Um capacitor ideal, originalmente vazio, de placas quadradas, paralelas, tem suas arestas duplicadas, mantendo-se a distância entre as placas constante. Ainda que preenchamos tal capacitor com um material isolante qualquer, é impossível fazer a nova capacitância igual à antiga.

__V__ Em um condutor em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos de seu interior.

__F__ Se o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada for zero, então não há partículas carregadas na região interior à superfície.

__F__ De acordo com o princípio da superposição, o campo eletrostático criado por um sistema de N partículas carregadas em um ponto de uma superfície fechada é dado pela soma vetorial apenas dos campos das cargas que estiverem dentro dessa superfície.

__F__ O campo eletrostático em qualquer ponto de uma superfície equipotencial tem sempre o mesmo módulo, já que ele é sempre perpendicular a essa superfície.

__V__ Se um capacitor é mantido isolado enquanto um material dielétrico é inserido em seu interior, sua energia armazenada diminui.

__F__ Um dipolo elétrico, formado por partículas de cargas q ($q > 0$) e $-q$, separadas por uma distância fixa d, encontra-se em uma região onde há um campo eletrostático uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$. Inicialmente o seu momento de dipolo aponta na mesma direção e no mesmo sentido que o campo. O dipolo é girado de 180^0 até ficar antiparalelo ao campo (mesma direção que $\vec{\boldsymbol{E}}$, mas sentido oposto). O trabalho realizado pelas forças eletrostáticas sobre o dipolo, nesse processo, foi positivo.

__V__ Duas linhas de campo elétrico nunca podem se cruzar.

__F__ A lei de Gauss só é válida para distribuições de carga com algum tipo de simetria.

Seção 2. Múltipla escolha (4×0,7 = 2,8 pontos)

1. (e)
2. (b)
3. (a)
4. (g)

Seção 3. Questões discursivas (1×2,4 + 1 × 1,8 = 4,2 pontos)

1. **Resolução:**

(a) A carga da esfera é dada por:

$$Q = \int_{esfera} \rho\, dV = \int_0^R Cr^2\, 4\pi r^2\, dr = 4\pi C \int_0^R r^4\, dr,$$

$$\rightarrow \boxed{Q = \frac{4\pi C}{5} R^5.}$$

$\blacksquare$

(b) Devido à simetria esférica da distribuição de cargas, podemos escrever $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = E_r(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Desse modo, escolhemos uma superfíciee gaussiana esférica de raio genérico r e com centro coincidente com o centro da esfera, denotada por S. Utilizando a lei de Gauss, temos

$$\oint_S E_r(r)\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0}\,,$$

onde $Q_{int}(S)$ é a a carga no interior de S. Com essa escolha de S, vemos que $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{r}}$, de modo que $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 1$. Além disso, $E_r(r)$ é constante nessa superfície, o que nos permite escrever:

$$4\pi r^2\, E_r(r) = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E_r(r) = \frac{Q_{int}(S)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,.$$

Para um ponto $\mathscr{P}$ fora da esfera, a uma distância r do centro da mesma, $Q_{int}(S) = Q$, onde Q é a carga total contida na esfera e calculada no ítem (a). Assim:

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}.}$$

$\blacksquare$

(c) A força $d\vec{\boldsymbol{F}}_h$ sobre um elemento infinitesimal de carga da haste $dq = \lambda dy$, localizado entre y e $y + dy$, é dada por $d\vec{\boldsymbol{F}}_h = dq\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0)$, onde $\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0)$ é o campo criado pela esfera carregada na posição do elemento de carga da haste. Substituindo a expressão para o campo produzido pela esfera em um ponto fora da mesma, temos

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_h = dq\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0) = \frac{Q\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 y^2}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

Somando sobre todos os elementos de carga da haste, obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}_h &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{y}} \int_{a-\frac{L}{2}}^{a+\frac{L}{2}} \frac{dy}{y^2} \\
&= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a - L/2} - \frac{1}{a + L/2}\right]\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{(a^2 - L^2/4)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_h = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{(a^2 - L^2/4)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.}$$

(d) Para $a \gg L$, temos, em primeira aproximação,

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_h \approx \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\,\hat{\boldsymbol{y}}},$$

onde $q = \lambda L$ é a carga da haste. Nessa aproximação, a haste se comporta como um objeto puntiforme de carga q, localizado a uma distância a do centro da esfera, razão pela qual o resultado corresponde a uma força coulombiana entre duas partículas de cargas Q e q, a uma distância a uma da outra.

$\blacksquare$

2. **Resolução:**

(a) O capacitor formado tem a capacitância C da associação de dois capacitores em série, um com vácuo entre suas placas, de capacitância C_1, e o outro com o dielétrico entre suas placas, com capacitância C_2, tal que:

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d/2} = \frac{2\epsilon_0 A}{d},$$

e:

$$C_2 = \epsilon_0 K \frac{A}{d/2} = \frac{2K\epsilon_0 A}{d}.$$

Além disso, temos para a associação em série:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Assim, substituindo as expressões para C_1 e C_2 na equação acima, encontramos:

$$\rightarrow \boxed{C = 2\epsilon_0 \left(\frac{K}{1+K}\right)\frac{A}{d}.}$$

■

(b) Ao ser submetido a uma diferença de potencial V, o capacitor se carrega com uma carga livre Q, dada por:

$$Q = CV = 2\epsilon_0 A \left(\frac{K}{1+K}\right)\frac{V}{d}.$$

Vamos utilizar a lei de Gauss para estabelecer uma relação entre a intensidade do campo elétrico no vácuo (E_v) e a carga livre total armazenada no capacitor. Para isso, considere a placa em contato com o vácuo. Pela simetria do problema é conveniente escolhermos uma superfície gaussiana cilíndrica S, com tampas paralelas à placa. Colocamos uma das tampas no interior da placa condutora, onde $E = 0$, e outra na região de vácuo. Seja A_S a rea de cada tampa. O fluxo de campo elétrico através de S é:

$$\Phi_E^S = \int_S \vec{\boldsymbol{E}}.d\vec{\boldsymbol{A}} = E_v A_S,$$

pois apenas a tampa na região de vácuo contribui para o fluxo. Como a carga livre se distribui uniformemente pela placa, a carga livre total no interior de S é:

$$Q_{int}^S = \sigma A_S,$$

onde $\sigma = Q/A$ é a densidade superficial de carga livre armazenada nas placas. Portanto, pela lei de Gauss:

$$\Phi_E^S = \frac{Q_{int}^S}{\epsilon_0} \rightarrow E_v = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0},$$

$$\rightarrow \boxed{E_v = 2\left(\frac{K}{K+1}\right)\left(\frac{V}{d}\right).}$$

No interior do dielétrico o módulo do campo elétrico E_d é dado por:

$$E_d = E_v/K,$$

assim:

$$\rightarrow \boxed{E_d = 2\left(\frac{1}{K+1}\right)\left(\frac{V}{d}\right).}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2017/1 – Primeira Prova: 17/04/2017
Versão: B

Formulário

$$\vec{\boldsymbol{F}}_e = q\vec{\boldsymbol{E}}\,, \quad \vec{\boldsymbol{E}} = k_0 \frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \quad \left(k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right), \quad \oint_S \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\,, \quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V\,, \quad V = k_0\frac{q}{r}\,, \quad U = k_0\frac{qq'}{r}\,,$$

$$C = Q/V\,, \quad U = \frac{1}{2}QV\,, \quad u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,, \quad (1+x)^n \approx 1 + nx \quad n, x \in \mathbb{R} \;\; e \;\; |x| \ll 1$$

Seção 1. Falso ou Verdadeiro (10×0,3 = 3,0 pontos)

Indique com **V** se a afirmação é verdadeira, ou **F**, se falsa. Note que há a seguinte **PENALIZAÇÃO: cada questão erradamente indicada corresponderá a uma diminuição de 0,2 ponto da nota do estudante obtida nesta seção. Caso não queira correr o risco de penalização, deixe a resposta em branco!**

______ Aproxima-se uma partícula carregada de uma esfera condutora neutra e isolada. Após restabelecido o equilíbrio eletrostático, a força eletrostática resultante sobre a esfera é nula, já que o campo eletrostático em qualquer ponto no interior da esfera é nulo.

______ Um dipolo elétrico, formado por partículas de cargas q ($q > 0$) e $-q$, separadas por uma distância fixa d, encontra-se em uma região onde há um campo eletrostático uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$. Inicialmente o seu momento de dipolo aponta na mesma direção e no mesmo sentido que o campo. O dipolo é girado de 180^0 até ficar antiparalelo ao campo (mesma direção que $\vec{\boldsymbol{E}}$, mas sentido oposto). O trabalho realizado pelas forças eletrostáticas sobre o dipolo, nesse processo, foi positivo.

______ Em um condutor em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos de seu interior.

______ Duas linhas de campo elétrico nunca podem se cruzar.

______ De acordo com o princípio da superposição, o campo eletrostático criado por um sistema de N partículas carregadas em um ponto de uma superfície fechada é dado pela soma vetorial apenas dos campos das cargas que estiverem dentro dessa superfície.

______ Um capacitor ideal, originalmente vazio, de placas quadradas, paralelas, tem suas arestas duplicadas, mantendo-se a distância entre as placas constante. Ainda que preenchamos tal capacitor com um material isolante qualquer, é impossível fazer a nova capacitância igual à antiga.

______ A lei de Gauss só é válida para distribuições de carga com algum tipo de simetria.

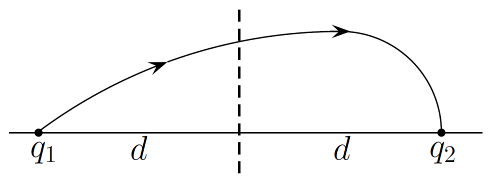
______ Se um capacitor é mantido isolado enquanto um material dielétrico é inserido em seu interior, sua energia armazenada diminui.

______ Se o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada for zero, então não há partículas carregadas na região interior à superfície.

______ O campo eletrostático em qualquer ponto de uma superfície equipotencial tem sempre o mesmo módulo, já que ele é sempre perpendicular a essa superfície.

Seção 2. Múltipla escolha (4×0,7 = 2,8 pontos)

1. A figura mostra um sistema formado por partículas carregadas com cargas q_1 e q_2 e uma das linhas de campo que sai de q_1 e chega em q_2. A reta tracejada é perpendicular à reta que passa pelas cargas e estas estão à mesma distância d da reta tracejada.



A partir do desenho, podemos afirmar que

(a) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e que $|q_1| < |q_2|$;

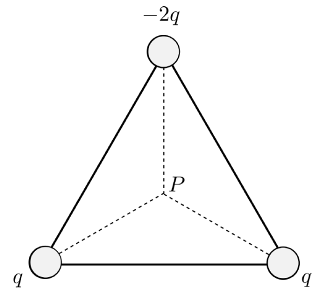
(b) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e que $|q_1| > |q_2|$;

(c) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e seus módulos são iguais;

(d) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ e que $|q_1| < |q_2|$;

(e) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ e que $|q_1| > |q_2|$;

2. Três partículas carregadas com cargas q, q e $-2q$ ($q > 0$) são fixadas sobre os vértices de um triângulo equilátero, como mostrado na figura abaixo. O centro do triângulo é indicado pelo ponto P.



Considere que a energia potencial elétrica seja nula quando as cargas estiverem infinitamente afastadas. Sobre esse sistema, são feitas as afirmativas abaixo:

(I) A energia potential elétrica do sistema é negativa.
(II) O potencial elétrico é constante sobre um eixo perpendicular ao triângulo e que passa por P.
(III) O trabalho realizado pela força elétrica sobre uma partícula carregada, quando ela é deslocada do infinito até o ponto P, é nulo.

São VERDADEIRAS as afirmativas:

(a) I.

(b) II.

(c) III.

(d) I e II.

(e) I e III.

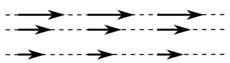
(f) II e III.

(g) I, II e III.

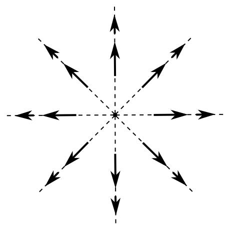
(h) Nenhuma delas.

3. Considere os seguintes três campos vetoriais em certas regiões do espaço (as setas representam os campos, em diferentes pontos, e as curvas tracejadas, suas correspondentes linhas de campo):

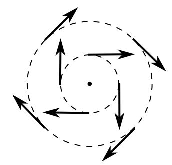
(I)



(II)



(III)



Indique a opção que melhor assinala, desses campos, aquele(s) que, de fato, **não** pode(m) ser campo(s) eletrostático(s). [Sugestão: um campo eletrostático tem de ser conservativo].

(a) I.

(b) II.

(c) III.

(d) I e II.

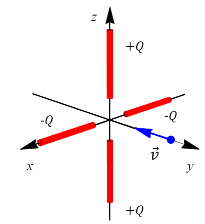
(e) I e III.

(f) II e III.

(g) I, II e III.

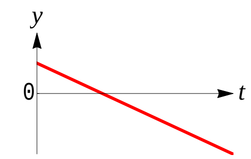
(h) Nenhum deles.

4. Quatro fios finos de mesmo comprimento estão dispostos no plano xz simetricamente em torno da origem, como mostrado na figura abaixo. Cada um dos fios dispostos ao longo do eixo z possui uma carga $Q > 0$, estacionária e uniformemente distribuída. Já os fios dispostos ao longo do eixo x possuem, cada um, uma carga $-Q$, também estacionária e uniformemente distribuída.

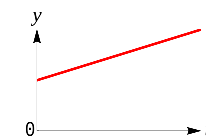


No instante de tempo $t = 0$ uma partícula de carga $q > 0$ encontra-se sobre o eixo y, deslocando-se com velocidade $\boldsymbol{\vec{v}} = -v\boldsymbol{\hat{y}}$ ($v > 0$). Dentre os gráficos abaixo, qual deles descreve o movimento subsequente da partícula?

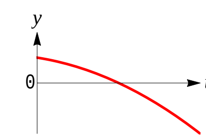
(a)



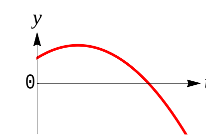
(b)



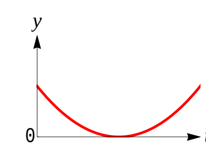
(c)



(d)



(e)



Seção 3. Questões discursivas (1×2,4 + 1 × 1,8 = 4,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,4 pontos]
Considere uma esfera isolante de raio R carregada com a densidade volumar de carga $\rho(r) = Cr^2$, sendo C uma constante e r a distância de um ponto genérico ao centro da esfera. Considere também uma barra de comprimento L e densidade linear de carga constante λ. A barra está orientada para o centro da esfera e o seu ponto médio está a uma distância a do centro da esfera, sendo $a - L/2 > R$, como mostrado na Figura 1.
(a) Determine a carga Q da esfera. [0,6 ponto]
(b) Utilizando a lei de Gauss, calcule o campo eletrostático (módulo, direção e sentido) produzido apenas pela esfera, num ponto $\mathscr{P}$, situado a uma distância r do centro da esfera, tal que $r > R$. [0,6 ponto]
(c) Calcule a força eletrostática (módulo, direção e sentido) exercida pela esfera sobre a haste. [0,8 ponto]
(d) Obtenha uma expressão aproximada para a força exercida pela esfera sobre a haste para $a \gg L$ e discuta o resultado encontrado. [0,4 ponto]

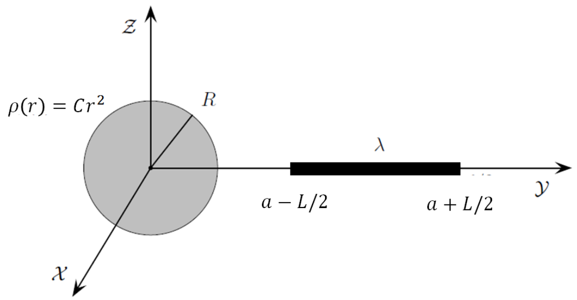


Figura 3: Questão discursiva 1.

2. [1,8 pontos]
Um capacitor é formado por duas placas condutoras planas e paralelas de área A cada uma, separadas por uma distância d muito menor que as suas dimensões. Um material isolante de constante dielétrica K é inserido no capacitor de forma a ocupar metade do volume entre as placas, como mostrado na Figura 2, ficando completamente em contato com uma delas, enquanto a outra metade permanece no vácuo. A seguir, uma diferença de potencial V é aplicada entre as placas. Em termos de ϵ_o, A, V, K e d, determine para esse sistema:
(a) A capacitância C do sistema. [0,8 ponto]
(b) Os módulos do campo elétrico na metade vazia (E_v) e na metade com dielétrico (E_d). [1,0 ponto]

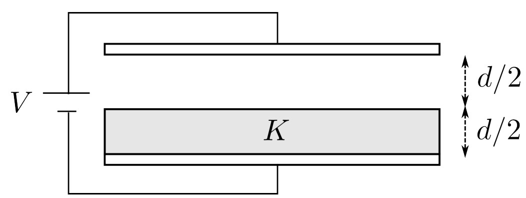


Figura 4: Questão discursiva 2.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{B}}$

Seção 1. Falso ou Verdadeiro (10×0,3 = 3,0 pontos)

__F__ Aproxima-se uma partícula carregada de uma esfera condutora neutra e isolada. Após restabelecido o equilíbrio eletrostático, a força eletrostática resultante sobre a esfera é nula, já que o campo eletrostático em qualquer ponto no interior da esfera é nulo.

__F__ Um dipolo elétrico, formado por partículas de cargas q ($q > 0$) e $-q$, separadas por uma distância fixa d, encontra-se em uma região onde há um campo eletrostático uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$. Inicialmente o seu momento de dipolo aponta na mesma direção e no mesmo sentido que o campo. O dipolo é girado de 180^0 até ficar antiparalelo ao campo (mesma direção que $\vec{\boldsymbol{E}}$, mas sentido oposto). O trabalho realizado pelas forças eletrostáticas sobre o dipolo, nesse processo, foi positivo.

__V__ Em um condutor em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos de seu interior.

__V__ Duas linhas de campo elétrico nunca podem se cruzar.

__F__ De acordo com o princípio da superposição, o campo eletrostático criado por um sistema de N partículas carregadas em um ponto de uma superfície fechada é dado pela soma vetorial apenas dos campos das cargas que estiverem dentro dessa superfície.

__V__ Um capacitor ideal, originalmente vazio, de placas quadradas, paralelas, tem suas arestas duplicadas, mantendo-se a distância entre as placas constante. Ainda que preenchamos tal capacitor com um material isolante qualquer, é impossível fazer a nova capacitância igual à antiga.

__F__ A lei de Gauss só é válida para distribuições de carga com algum tipo de simetria.

__V__ Se um capacitor é mantido isolado enquanto um material dielétrico é inserido em seu interior, sua energia armazenada diminui.

__F__ Se o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada for zero, então não há partículas carregadas na região interior à superfície.

__F__ O campo eletrostático em qualquer ponto de uma superfície equipotencial tem sempre o mesmo módulo, já que ele é sempre perpendicular a essa superfície.

Seção 2. Múltipla escolha (4×0,7 = 2,8 pontos)

1. (b)
2. (g)
3. (e)
4. (a)

Seção 3. Questões discursivas (1×2,4 + 1 × 1,8 = 4,2 pontos)

1. **Resolução:**
(a) A carga da esfera é dada por:

$$Q = \int_{esfera} \rho \, dV = \int_0^R Cr^2 \, 4\pi r^2 \, dr = 4\pi C \int_0^R r^4 \, dr,$$

$$\rightarrow \boxed{Q = \frac{4\pi C}{5} R^5.}$$

■

(b) Devido à simetria esférica da distribuição de cargas, podemos escrever $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = E_r(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Desse modo, escolhemos uma superfíciee gaussiana esférica de raio genérico r e com centro coincidente com o centro da esfera, denotada por S. Utilizando a lei de Gauss, temos

$$\oint_S E_r(r)\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0}\,,$$

onde $Q_{int}(S)$ é a a carga no interior de S. Com essa escolha de S, vemos que $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{r}}$, de modo que $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 1$. Além disso, $E_r(r)$ é constante nessa superfície, o que nos permite escrever:

$$4\pi r^2\,E_r(r) = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0} \quad\Longrightarrow\quad E_r(r) = \frac{Q_{int}(S)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,.$$

Para um ponto $\mathscr{P}$ fora da esfera, a uma distância r do centro da mesma, $Q_{int}(S) = Q$, onde Q é a carga total contida na esfera e calculada no ítem (a). Assim:

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}.}$$

■

(c) A força $d\vec{\boldsymbol{F}}_h$ sobre um elemento infinitesimal de carga da haste $dq = \lambda dy$, localizado entre y e $y + dy$, é dada por $d\vec{\boldsymbol{F}}_h = dq\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0)$, onde $\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0)$ é o campo criado pela esfera carregada na posição do elemento de carga da haste. Substituindo a expressão para o campo produzido pela esfera em um ponto fora da mesma, temos

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_h = dq\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0) = \frac{Q\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 y^2}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

Somando sobre todos os elementos de carga da haste, obtemos

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}_h &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{y}}\int_{a-\frac{L}{2}}^{a+\frac{L}{2}}\frac{dy}{y^2}\\ &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a - L/2} - \frac{1}{a + L/2}\right]\hat{\boldsymbol{y}}\\ &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{(a^2 - L^2/4)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_h = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{(a^2 - L^2/4)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.}$$

(d) Para $a \gg L$, temos, em primeira aproximação,

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_h \approx \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\,\hat{\boldsymbol{y}}}\,,$$

onde $q = \lambda L$ é a carga da haste. Nessa aproximação, a haste se comporta como um objeto puntiforme de carga q, localizado a uma distância a do centro da esfera, razão pela qual o resultado corresponde a uma força coulombiana entre duas partículas de cargas Q e q, a uma distância a uma da outra.

■

2. **Resolução:**
(a) O capacitor formado tem a capacitância C da associação de dois capacitores em série, um com vácuo entre suas placas, de capacitância C_1, e o outro com o dielétrico entre suas placas, com capacitância C_2, tal que:

$$C_1 = \epsilon_0\frac{A}{d/2} = \frac{2\epsilon_0 A}{d},$$

e:

$$C_2 = \epsilon_0 K\frac{A}{d/2} = \frac{2K\epsilon_0 A}{d}.$$

Além disso, temos para a associação em série:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Assim, substituindo as expressões para C_1 e C_2 na equação acima, encontramos:

$$\rightarrow \boxed{C = 2\epsilon_0\left(\frac{K}{1+K}\right)\frac{A}{d}.}$$

■

(b) Ao ser submetido a uma diferença de potencial V, o capacitor se carrega com uma carga livre Q, dada por:

$$Q = CV = 2\epsilon_0 A\left(\frac{K}{1+K}\right)\frac{V}{d}.$$

Vamos utilizar a lei de Gauss para estabelecer uma relação entre a intensidade do campo elétrico no vácuo (E_v) e a carga livre total armazenada no capacitor. Para isso, considere a placa em contato com o vácuo. Pela simetria do problema é conveniente escolhermos uma superfície gaussiana cilíndrica S, com tampas paralelas à placa. Colocamos uma das tampas no interior da placa condutora, onde $E = 0$, e outra na região de vácuo. Seja A_S a rea de cada tampa. O fluxo de campo elétrico através de S é:

$$\Phi_E^S = \int_S \vec{\boldsymbol{E}}.d\vec{\boldsymbol{A}} = E_v A_S,$$

pois apenas a tampa na região de vácuo contribui para o fluxo. Como a carga livre se distribui uniformemente pela placa, a carga livre total no interior de S é:

$$Q_{int}^S = \sigma A_S,$$

onde $\sigma = Q/A$ é a densidade superficial de carga livre armazenada nas placas. Portanto, pela lei de Gauss:

$$\Phi_E^S = \frac{Q_{int}^S}{\epsilon_0} \rightarrow E_v = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0},$$

$$\rightarrow \boxed{E_v = 2\left(\frac{K}{K+1}\right)\left(\frac{V}{d}\right).}$$

No interior do dielétrico o módulo do campo elétrico E_d é dado por:

$$E_d = E_v/K,$$

assim:

$$\rightarrow \boxed{E_d = 2\left(\frac{1}{K+1}\right)\left(\frac{V}{d}\right).}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2017/1 – Primeira Prova: 17/04/2017
Versão: C

Formulário

$$\vec{F}_\text{e} = q\vec{E}\,, \quad \vec{E} = k_0\,\frac{q}{r^2}\,\hat{r} \quad \left(k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right), \quad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_\text{int}}{\varepsilon_0}\,, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,, \quad V = k_0\,\frac{q}{r}\,, \quad U = k_0\,\frac{qq'}{r}\,,$$

$$C = Q/V\,, \quad U = \frac{1}{2}QV\,, \quad u_E = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2\,, \quad (1+x)^n \approx 1 + nx \quad n, x \in \mathbb{R} \;\; e \;\; |x| \ll 1$$

Seção 1. Falso ou Verdadeiro (10×0,3 = 3,0 pontos)

Indique com **V** se a afirmação é verdadeira, ou **F**, se falsa. Note que há a seguinte **PENALIZAÇÃO: cada questão erradamente indicada corresponderá a uma diminuição de 0,2 ponto da nota do estudante obtida nesta seção. Caso não queira correr o risco de penalização, deixe a resposta em branco!**

______ Um capacitor ideal, originalmente vazio, de placas quadradas, paralelas, tem suas arestas duplicadas, mantendo-se a distância entre as placas constante. Ainda que preenchamos tal capacitor com um material isolante qualquer, é impossível fazer a nova capacitância igual à antiga.

______ De acordo com o princípio da superposição, o campo eletrostático criado por um sistema de N partículas carregadas em um ponto de uma superfície fechada é dado pela soma vetorial apenas dos campos das cargas que estiverem dentro dessa superfície.

______ Aproxima-se uma partícula carregada de uma esfera condutora neutra e isolada. Após restabelecido o equilíbrio eletrostático, a força eletrostática resultante sobre a esfera é nula, já que o campo eletrostático em qualquer ponto no interior da esfera é nulo.

______ A lei de Gauss só é válida para distribuições de carga com algum tipo de simetria.

______ Se um capacitor é mantido isolado enquanto um material dielétrico é inserido em seu interior, sua energia armazenada diminui.

______ Em um condutor em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos de seu interior.

______ Se o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada for zero, então não há partículas carregadas na região interior à superfície.

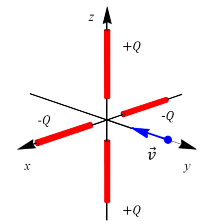
______ O campo eletrostático em qualquer ponto de uma superfície equipotencial tem sempre o mesmo módulo, já que ele é sempre perpendicular a essa superfície.

______ Duas linhas de campo elétrico nunca podem se cruzar.

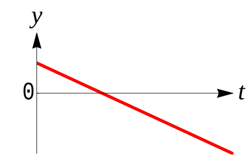
______ Um dipolo elétrico, formado por partículas de cargas q ($q > 0$) e $-q$, separadas por uma distância fixa d, encontra-se em uma região onde há um campo eletrostático uniforme $\vec{E}$. Inicialmente o seu momento de dipolo aponta na mesma direção e no mesmo sentido que o campo. O dipolo é girado de 180^0 até ficar antiparalelo ao campo (mesma direção que $\vec{E}$, mas sentido oposto). O trabalho realizado pelas forças eletrostáticas sobre o dipolo, nesse processo, foi positivo.

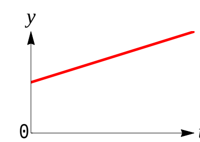
Seção 2. Múltipla escolha (4×0,7 = 2,8 pontos)

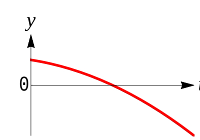
1. Quatro fios finos de mesmo comprimento estão dispostos no plano xz simetricamente em torno da origem, como mostrado na figura abaixo. Cada um dos fios dispostos ao longo do eixo z possui uma carga $Q > 0$, estacionária e uniformemente distribuída. Já os fios dispostos ao longo do eixo x possuem, cada um, uma carga $-Q$, também estacionária e uniformemente distribuída.

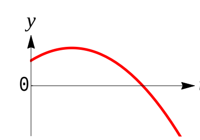


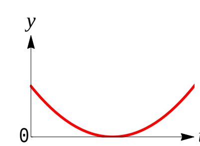
No instante de tempo $t = 0$ uma partícula de carga $q > 0$ encontra-se sobre o eixo y, deslocando-se com velocidade $\vec{v} = -v\hat{y}$ ($v > 0$). Dentre os gráficos abaixo, qual deles descreve o movimento subsequente da partícula?

(a)


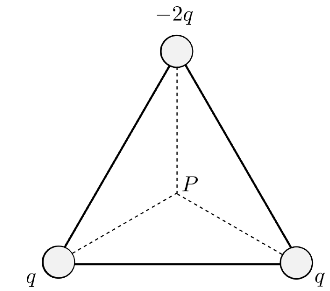
(b)


(c)


(d)


(e)


2. Três partículas carregadas com cargas q, q e $-2q$ ($q > 0$) são fixadas sobre os vértices de um triângulo equilátero, como mostrado na figura abaixo. O centro do triângulo é indicado pelo ponto P.



Considere que a energia potencial elétrica seja nula quando as cargas estiverem infinitamente afastadas. Sobre esse sistema, são feitas as afirmativas abaixo:

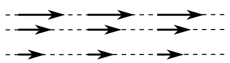
(I) A energia potential elétrica do sistema é negativa.
(II) O potencial elétrico é constante sobre um eixo perpendicular ao triângulo e que passa por P.
(III) O trabalho realizado pela força elétrica sobre uma partícula carregada, quando ela é deslocada do infinito até o ponto P, é nulo.

São VERDADEIRAS as afirmativas:

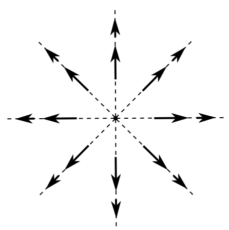
(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) I e II.
(e) I e III.
(f) II e III.
(g) I, II e III.
(h) Nenhuma delas.

3. Considere os seguintes três campos vetoriais em certas regiões do espaço (as setas representam os campos, em diferentes pontos, e as curvas tracejadas, suas correspondentes linhas de campo):

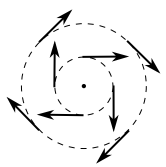
(I)



(II)



(III)



Indique a opção que melhor assinala, desses campos, aquele(s) que, de fato, **não** pode(m) ser campo(s) eletrostático(s). [Sugestão: um campo eletrostático tem de ser conservativo].

(a) I.

(b) II.

(c) III.

(d) I e II.

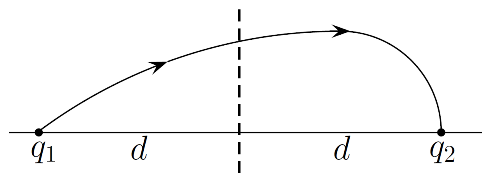
(e) I e III.

(f) II e III.

(g) I, II e III.

(h) Nenhum deles.

4. A figura mostra um sistema formado por partículas carregadas com cargas q_1 e q_2 e uma das linhas de campo que sai de q_1 e chega em q_2. A reta tracejada é perpendicular à reta que passa pelas cargas e estas estão à mesma distância d da reta tracejada.



A partir do desenho, podemos afirmar que

(a) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e que $|q_1| < |q_2|$;

(b) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e que $|q_1| > |q_2|$;

(c) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e seus módulos são iguais;

(d) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ e que $|q_1| < |q_2|$;

(e) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ e que $|q_1| > |q_2|$;

Seção 3. Questões discursivas (1×2,4 + 1 × 1,8 = 4,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1.

[2,4 pontos]
Considere uma esfera isolante de raio R carregada com a densidade volumar de carga $\rho(r) = Cr^2$, sendo C uma constante e r a distância de um ponto genérico ao centro da esfera. Considere também uma barra de comprimento L e densidade linear de carga constante λ. A barra está orientada para o centro da esfera e o seu ponto médio está a uma distância a do centro da esfera, sendo $a - L/2 > R$, como mostrado na Figura 1.
(a) Determine a carga Q da esfera. [0,6 ponto]
(b) Utilizando a lei de Gauss, calcule o campo eletrostático (módulo, direção e sentido) produzido apenas pela esfera, num ponto $\mathscr{P}$, situado a uma distância r do centro da esfera, tal que $r > R$. [0,6 ponto]
(c) Calcule a força eletrostática (módulo, direção e sentido) exercida pela esfera sobre a haste. [0,8 ponto]
(d) Obtenha uma expressão aproximada para a força exercida pela esfera sobre a haste para $a \gg L$ e discuta o resultado encontrado. [0,4 ponto]

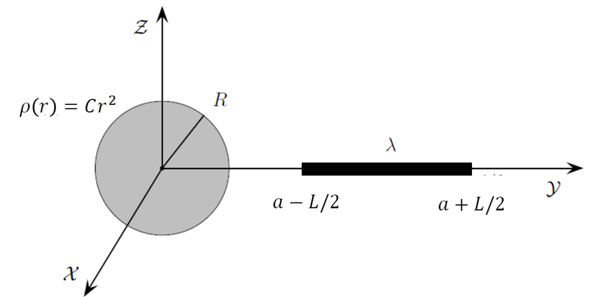


Figura 5: Questão discursiva 1.

2.

[1,8 pontos]
Um capacitor é formado por duas placas condutoras planas e paralelas de área A cada uma, separadas por uma distância d muito menor que as suas dimensões. Um material isolante de constante dielétrica K é inserido no capacitor de forma a ocupar metade do volume entre as placas, como mostrado na Figura 2, ficando completamente em contato com uma delas, enquanto a outra metade permanece no vácuo. A seguir, uma diferença de potencial V é aplicada entre as placas. Em termos de ϵ_o, A, V, K e d, determine para esse sistema:
(a) A capacitância C do sistema. [0,8 ponto]
(b) Os módulos do campo elétrico na metade vazia (E_v) e na metade com dielétrico (E_d). [1,0 ponto]

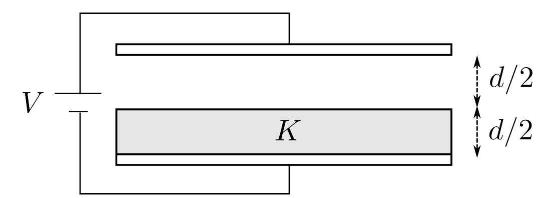


Figura 6: Questão discursiva 2.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{C}}$

Seção 1. Falso ou Verdadeiro (10×0,3 = 3,0 pontos)

__V__ Um capacitor ideal, originalmente vazio, de placas quadradas, paralelas, tem suas arestas duplicadas, mantendo-se a distância entre as placas constante. Ainda que preenchamos tal capacitor com um material isolante qualquer, é impossível fazer a nova capacitância igual à antiga.

__F__ De acordo com o princípio da superposição, o campo eletrostático criado por um sistema de N partículas carregadas em um ponto de uma superfície fechada é dado pela soma vetorial apenas dos campos das cargas que estiverem dentro dessa superfície.

__F__ Aproxima-se uma partícula carregada de uma esfera condutora neutra e isolada. Após restabelecido o equilíbrio eletrostático, a força eletrostática resultante sobre a esfera é nula, já que o campo eletrostático em qualquer ponto no interior da esfera é nulo.

__F__ A lei de Gauss só é válida para distribuições de carga com algum tipo de simetria.

__V__ Se um capacitor é mantido isolado enquanto um material dielétrico é inserido em seu interior, sua energia armazenada diminui.

__V__ Em um condutor em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos de seu interior.

__F__ Se o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada for zero, então não há partículas carregadas na região interior à superfície.

__F__ O campo eletrostático em qualquer ponto de uma superfície equipotencial tem sempre o mesmo módulo, já que ele é sempre perpendicular a essa superfície.

__V__ Duas linhas de campo elétrico nunca podem se cruzar.

__F__ Um dipolo elétrico, formado por partículas de cargas q $(q > 0)$ e $-q$, separadas por uma distância fixa d, encontra-se em uma região onde há um campo eletrostático uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$. Inicialmente o seu momento de dipolo aponta na mesma direção e no mesmo sentido que o campo. O dipolo é girado de 180^0 até ficar antiparalelo ao campo (mesma direção que $\vec{\boldsymbol{E}}$, mas sentido oposto). O trabalho realizado pelas forças eletrostáticas sobre o dipolo, nesse processo, foi positivo.

Seção 2. Múltipla escolha (4×0,7 = 2,8 pontos)

1. (a)
2. (g)
3. (e)
4. (b)

Seção 3. Questões discursivas (1×2,4 + 1 × 1,8 = 4,2 pontos)

1. **Resolução:**

(a) A carga da esfera é dada por:

$$Q = \int_{esfera} \rho\, dV = \int_0^R Cr^2\, 4\pi r^2\, dr = 4\pi C \int_0^R r^4\, dr,$$

$$\rightarrow \boxed{Q = \frac{4\pi C}{5} R^5.}$$

■

(b) Devido à simetria esférica da distribuição de cargas, podemos escrever $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = E_r(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Desse modo, escolhemos uma superfíciee gaussiana esférica de raio genérico r e com centro coincidente com o centro da esfera, denotada por S. Utilizando a lei de Gauss, temos

$$\oint_S E_r(r)\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0}\,,$$

onde $Q_{int}(S)$ é a a carga no interior de S. Com essa escolha de S, vemos que $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{r}}$, de modo que $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 1$. Além disso, $E_r(r)$ é constante nessa superfície, o que nos permite escrever:

$$4\pi r^2\, E_r(r) = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E_r(r) = \frac{Q_{int}(S)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,.$$

Para um ponto $\mathscr{P}$ fora da esfera, a uma distância r do centro da mesma, $Q_{int}(S) = Q$, onde Q é a carga total contida na esfera e calculada no ítem (a). Assim:

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}.}$$

■

(c) A força $d\vec{\boldsymbol{F}}_h$ sobre um elemento infinitesimal de carga da haste $dq = \lambda dy$, localizado entre y e $y + dy$, é dada por $d\vec{\boldsymbol{F}}_h = dq\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0)$, onde $\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0)$ é o campo criado pela esfera carregada na posição do elemento de carga da haste. Substituindo a expressão para o campo produzido pela esfera em um ponto fora da mesma, temos

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_h = dq\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0, y, 0) = \frac{Q\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 y^2}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

Somando sobre todos os elementos de carga da haste, obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}_h &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{y}} \int_{a-\frac{L}{2}}^{a+\frac{L}{2}} \frac{dy}{y^2} \\
&= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a - L/2} - \frac{1}{a + L/2}\right]\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{(a^2 - L^2/4)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_h = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{(a^2 - L^2/4)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.}$$

(d) Para $a \gg L$, temos, em primeira aproximação,

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_h \approx \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\,\hat{\boldsymbol{y}}},$$

onde $q = \lambda L$ é a carga da haste. Nessa aproximação, a haste se comporta como um objeto puntiforme de carga q, localizado a uma distância a do centro da esfera, razão pela qual o resultado corresponde a uma força coulombiana entre duas partículas de cargas Q e q, a uma distância a uma da outra.

■

2. **Resolução:**

(a) O capacitor formado tem a capacitância C da associação de dois capacitores em série, um com vácuo entre suas placas, de capacitância C_1, e o outro com o dielétrico entre suas placas, com capacitância C_2, tal que:

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d/2} = \frac{2\epsilon_0 A}{d},$$

e:

$$C_2 = \epsilon_0 K \frac{A}{d/2} = \frac{2K\epsilon_0 A}{d}.$$

Além disso, temos para a associação em série:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Assim, substituindo as expressões para C_1 e C_2 na equação acima, encontramos:

$$\rightarrow \boxed{C = 2\epsilon_0 \left(\frac{K}{1+K}\right) \frac{A}{d}.}$$

■

(b) Ao ser submetido a uma diferença de potencial V, o capacitor se carrega com uma carga livre Q, dada por:

$$Q = CV = 2\epsilon_0 A \left(\frac{K}{1+K}\right) \frac{V}{d}.$$

Vamos utilizar a lei de Gauss para estabelecer uma relação entre a intensidade do campo elétrico no vácuo (E_v) e a carga livre total armazenada no capacitor. Para isso, considere a placa em contato com o vácuo. Pela simetria do problema é conveniente escolhermos uma superfície gaussiana cilíndrica S, com tampas paralelas à placa. Colocamos uma das tampas no interior da placa condutora, onde $E = 0$, e outra na região de vácuo. Seja A_S a rea de cada tampa. O fluxo de campo elétrico através de S é:

$$\Phi_E^S = \int_S \vec{E}.d\vec{A} = E_v A_S,$$

pois apenas a tampa na região de vácuo contribui para o fluxo. Como a carga livre se distribui uniformemente pela placa, a carga livre total no interior de S é:

$$Q_{int}^S = \sigma A_S,$$

onde $\sigma = Q/A$ é a densidade superficial de carga livre armazenada nas placas. Portanto, pela lei de Gauss:

$$\Phi_E^S = \frac{Q_{int}^S}{\epsilon_0} \rightarrow E_v = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0},$$

$$\rightarrow \boxed{E_v = 2\left(\frac{K}{K+1}\right)\left(\frac{V}{d}\right).}$$

No interior do dielétrico o módulo do campo elétrico E_d é dado por:

$$E_d = E_v/K,$$

assim:

$$\rightarrow \boxed{E_d = 2\left(\frac{1}{K+1}\right)\left(\frac{V}{d}\right).}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2017/1 – Primeira Prova: 17/04/2017
Versão: D

Formulário

$$\vec{F}_e = q\vec{E}, \quad \vec{E} = k_0 \frac{q}{r^2}\hat{r} \quad \left(k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right), \quad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\rm int}}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad V = k_0\frac{q}{r}, \quad U = k_0 \frac{qq'}{r},$$

$$C = Q/V, \quad U = \frac{1}{2}QV, \quad u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \quad (1+x)^n \approx 1 + nx \quad n, x \in \mathbb{R} \ e \ |x| \ll 1$$

Seção 1. Falso ou Verdadeiro (10×0,3 = 3,0 pontos)

Indique com **V** se a afirmação é verdadeira, ou **F**, se falsa. Note que há a seguinte **PENALIZAÇÃO: cada questão erradamente indicada corresponderá a uma diminuição de 0,2 ponto da nota do estudante obtida nesta seção. Caso não queira correr o risco de penalização, deixe a resposta em branco!**

______ De acordo com o princípio da superposição, o campo eletrostático criado por um sistema de N partículas carregadas em um ponto de uma superfície fechada é dado pela soma vetorial apenas dos campos das cargas que estiverem dentro dessa superfície.

______ A lei de Gauss só é válida para distribuições de carga com algum tipo de simetria.

______ Duas linhas de campo elétrico nunca podem se cruzar.

______ Em um condutor em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos de seu interior.

______ Um dipolo elétrico, formado por partículas de cargas q ($q > 0$) e $-q$, separadas por uma distância fixa d, encontra-se em uma região onde há um campo eletrostático uniforme $\vec{E}$. Inicialmente o seu momento de dipolo aponta na mesma direção e no mesmo sentido que o campo. O dipolo é girado de 180^0 até ficar antiparalelo ao campo (mesma direção que $\vec{E}$, mas sentido oposto). O trabalho realizado pelas forças eletrostáticas sobre o dipolo, nesse processo, foi positivo.

______ Se um capacitor é mantido isolado enquanto um material dielétrico é inserido em seu interior, sua energia armazenada diminui.

______ O campo eletrostático em qualquer ponto de uma superfície equipotencial tem sempre o mesmo módulo, já que ele é sempre perpendicular a essa superfície.

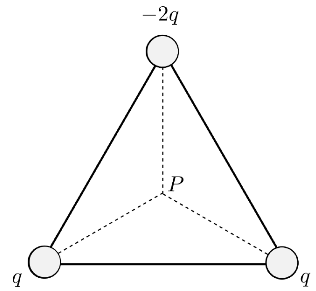
______ Aproxima-se uma partícula carregada de uma esfera condutora neutra e isolada. Após restabelecido o equilíbrio eletrostático, a força eletrostática resultante sobre a esfera é nula, já que o campo eletrostático em qualquer ponto no interior da esfera é nulo.

______ Se o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada for zero, então não há partículas carregadas na região interior à superfície.

______ Um capacitor ideal, originalmente vazio, de placas quadradas, paralelas, tem suas arestas duplicadas, mantendo-se a distância entre as placas constante. Ainda que preenchamos tal capacitor com um material isolante qualquer, é impossível fazer a nova capacitância igual à antiga.

Seção 2. Múltipla escolha (4×0,7 = 2,8 pontos)

1. Três partículas carregadas com cargas q, q e $-2q$ ($q > 0$) são fixadas sobre os vértices de um triângulo equilátero, como mostrado na figura abaixo. O centro do triângulo é indicado pelo ponto P.



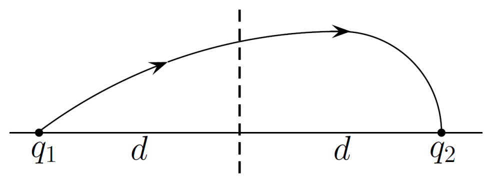
Considere que a energia potencial elétrica seja nula quando as cargas estiverem infinitamente afastadas. Sobre esse sistema, são feitas as afirmativas abaixo:

(I) A energia potential elétrica do sistema é negativa.
(II) O potencial elétrico é constante sobre um eixo perpendicular ao triângulo e que passa por P.
(III) O trabalho realizado pela força elétrica sobre uma partícula carregada, quando ela é deslocada do infinito até o ponto P, é nulo.

São VERDADEIRAS as afirmativas:

(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) I e II.
(e) I e III.
(f) II e III.
(g) I, II e III.
(h) Nenhuma delas.

2. A figura mostra um sistema formado por partículas carregadas com cargas q_1 e q_2 e uma das linhas de campo que sai de q_1 e chega em q_2. A reta tracejada é perpendicular à reta que passa pelas cargas e estas estão à mesma distância d da reta tracejada.

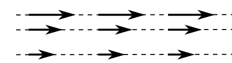


A partir do desenho, podemos afirmar que

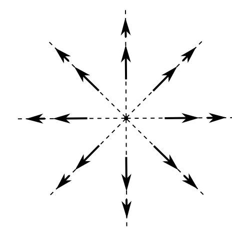
(a) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e que $|q_1| < |q_2|$;
(b) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e que $|q_1| > |q_2|$;
(c) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ e seus módulos são iguais;
(d) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ e que $|q_1| < |q_2|$;
(e) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ e que $|q_1| > |q_2|$;

3. Considere os seguintes três campos vetoriais em certas regiões do espaço (as setas representam os campos, em diferentes pontos, e as curvas tracejadas, suas correspondentes linhas de campo):

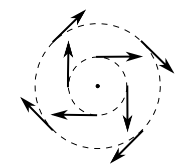
(I)



(II)



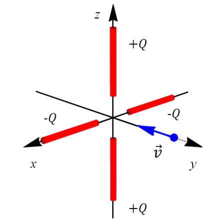
(III)



Indique a opção que melhor assinala, desses campos, aquele(s) que, de fato, **não** pode(m) ser campo(s) eletrostático(s). [Sugestão: um campo eletrostático tem de ser conservativo].

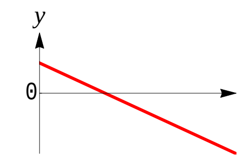
(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) I e II.
(e) I e III.
(f) II e III.
(g) I, II e III.
(h) Nenhum deles.

4. Quatro fios finos de mesmo comprimento estão dispostos no plano xz simetricamente em torno da origem, como mostrado na figura abaixo. Cada um dos fios dispostos ao longo do eixo z possui uma carga $Q > 0$, estacionária e uniformemente distribuída. Já os fios dispostos ao longo do eixo x possuem, cada um, uma carga $-Q$, também estacionária e uniformemente distribuída.

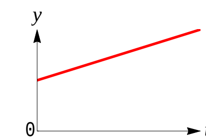


No instante de tempo $t = 0$ uma partícula de carga $q > 0$ encontra-se sobre o eixo y, deslocando-se com velocidade $\vec{v} = -v\hat{y}$ ($v > 0$). Dentre os gráficos abaixo, qual deles descreve o movimento subsequente da partícula?

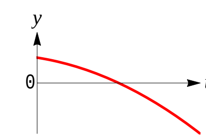
(a)



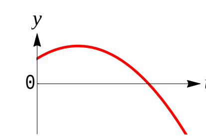
(b)



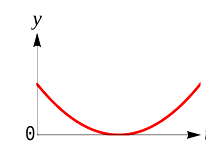
(c)



(d)



(e)



Seção 3. Questões discursivas (1×2,4 + 1 × 1,8 = 4,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,4 pontos]
Considere uma esfera isolante de raio R carregada com a densidade volumar de carga $\rho(r) = Cr^2$, sendo C uma constante e r a distância de um ponto genérico ao centro da esfera. Considere também uma barra de comprimento L e densidade linear de carga constante λ. A barra está orientada para o centro da esfera e o seu ponto médio está a uma distância a do centro da esfera, sendo $a - L/2 > R$, como mostrado na Figura 1.
(a) Determine a carga Q da esfera. [0,6 ponto]
(b) Utilizando a lei de Gauss, calcule o campo eletrostático (módulo, direção e sentido) produzido apenas pela esfera, num ponto $\mathscr{P}$, situado a uma distância r do centro da esfera, tal que $r > R$. [0,6 ponto]
(c) Calcule a força eletrostática (módulo, direção e sentido) exercida pela esfera sobre a haste. [0,8 ponto]
(d) Obtenha uma expressão aproximada para a força exercida pela esfera sobre a haste para $a \gg L$ e discuta o resultado encontrado. [0,4 ponto]

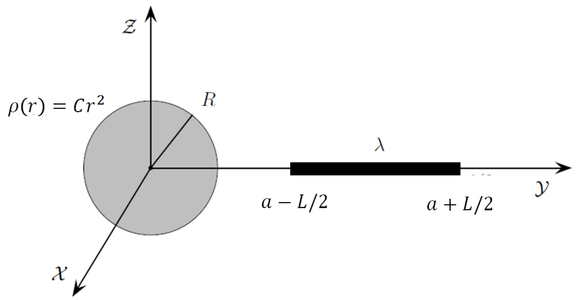


Figura 7: Questão discursiva 1.

2. [1,8 pontos]
Um capacitor é formado por duas placas condutoras planas e paralelas de área A cada uma, separadas por uma distância d muito menor que as suas dimensões. Um material isolante de constante dielétrica K é inserido no capacitor de forma a ocupar metade do volume entre as placas, como mostrado na Figura 2, ficando completamente em contato com uma delas, enquanto a outra metade permanece no vácuo. A seguir, uma diferença de potencial V é aplicada entre as placas. Em termos de ϵ_o, A, V, K e d, determine para esse sistema:
(a) A capacitância C do sistema. [0,8 ponto]
(b) Os módulos do campo elétrico na metade vazia (E_v) e na metade com dielétrico (E_d). [1,0 ponto]

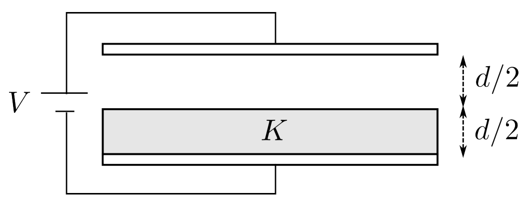


Figura 8: Questão discursiva 2.

Gabarito para Versão $\boxed{\text{D}}$

Seção 1. Falso ou Verdadeiro (10×0,3 = 3,0 pontos)

__F__ De acordo com o princípio da superposição, o campo eletrostático criado por um sistema de N partículas carregadas em um ponto de uma superfície fechada é dado pela soma vetorial apenas dos campos das cargas que estiverem dentro dessa superfície.

__F__ A lei de Gauss só é válida para distribuições de carga com algum tipo de simetria.

__V__ Duas linhas de campo elétrico nunca podem se cruzar.

__V__ Em um condutor em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico tem o mesmo valor em todos os pontos de seu interior.

__F__ Um dipolo elétrico, formado por partículas de cargas q ($q > 0$) e $-q$, separadas por uma distância fixa d, encontra-se em uma região onde há um campo eletrostático uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$. Inicialmente o seu momento de dipolo aponta na mesma direção e no mesmo sentido que o campo. O dipolo é girado de 180^0 até ficar antiparalelo ao campo (mesma direção que $\vec{\boldsymbol{E}}$, mas sentido oposto). O trabalho realizado pelas forças eletrostáticas sobre o dipolo, nesse processo, foi positivo.

__V__ Se um capacitor é mantido isolado enquanto um material dielétrico é inserido em seu interior, sua energia armazenada diminui.

__F__ O campo eletrostático em qualquer ponto de uma superfície equipotencial tem sempre o mesmo módulo, já que ele é sempre perpendicular a essa superfície.

__F__ Aproxima-se uma partícula carregada de uma esfera condutora neutra e isolada. Após restabelecido o equilíbrio eletrostático, a força eletrostática resultante sobre a esfera é nula, já que o campo eletrostático em qualquer ponto no interior da esfera é nulo.

__F__ Se o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada for zero, então não há partículas carregadas na região interior à superfície.

__V__ Um capacitor ideal, originalmente vazio, de placas quadradas, paralelas, tem suas arestas duplicadas, mantendo-se a distância entre as placas constante. Ainda que preenchamos tal capacitor com um material isolante qualquer, é impossível fazer a nova capacitância igual à antiga.

Seção 2. Múltipla escolha (4×0,7 = 2,8 pontos)

1. (g)
2. (b)
3. (e)
4. (a)

Seção 3. Questões discursivas (1×2,4 + 1 × 1,8 = 4,2 pontos)

1. **Resolução:**
(a) A carga da esfera é dada por:

$$Q = \int_{esfera} \rho \, dV = \int_0^R Cr^2 \, 4\pi r^2 \, dr = 4\pi C \int_0^R r^4 \, dr,$$

$$\rightarrow \boxed{Q = \frac{4\pi C}{5} R^5.}$$

■

(b) Devido à simetria esférica da distribuição de cargas, podemos escrever $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = E_r(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Desse modo, escolhemos uma superfíciee gaussiana esférica de raio genérico r e com centro coincidente com o centro da esfera, denotada por S. Utilizando a lei de Gauss, temos

$$\oint_S E_r(r)\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0}\,,$$

onde $Q_{int}(S)$ é a a carga no interior de S. Com essa escolha de S, vemos que $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{r}}$, de modo que $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 1$. Além disso, $E_r(r)$ é constante nessa superfície, o que nos permite escrever:

$$4\pi r^2\,E_r(r) = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0} \quad\Longrightarrow\quad E_r(r) = \frac{Q_{int}(S)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,.$$

Para um ponto $\mathscr{P}$ fora da esfera, a uma distância r do centro da mesma, $Q_{int}(S) = Q$, onde Q é a carga total contida na esfera e calculada no ítem (a). Assim:

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}.}$$

■

(c) A força $d\vec{\boldsymbol{F}}_h$ sobre um elemento infinitesimal de carga da haste $dq = \lambda dy$, localizado entre y e $y + dy$, é dada por $d\vec{\boldsymbol{F}}_h = dq\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0,y,0)$, onde $\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0,y,0)$ é o campo criado pela esfera carregada na posição do elemento de carga da haste. Substituindo a expressão para o campo produzido pela esfera em um ponto fora da mesma, temos

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_h = dq\vec{\boldsymbol{E}}_{esf}(0,y,0) = \frac{Q\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 y^2}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

Somando sobre todos os elementos de carga da haste, obtemos

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}_h &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{y}}\int_{a-\frac{L}{2}}^{a+\frac{L}{2}}\frac{dy}{y^2}\\ &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a-L/2} - \frac{1}{a+L/2}\right]\hat{\boldsymbol{y}}\\ &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2/4)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_h = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2/4)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.}$$

(d) Para $a \gg L$, temos, em primeira aproximação,

$$\rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_h \approx \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\,\hat{\boldsymbol{y}}}\,,$$

onde $q = \lambda L$ é a carga da haste. Nessa aproximação, a haste se comporta como um objeto puntiforme de carga q, localizado a uma distância a do centro da esfera, razão pela qual o resultado corresponde a uma força coulombiana entre duas partículas de cargas Q e q, a uma distância a uma da outra.

■

2. **Resolução:**

(a) O capacitor formado tem a capacitância C da associação de dois capacitores em série, um com vácuo entre suas placas, de capacitância C_1, e o outro com o dielétrico entre suas placas, com capacitância C_2, tal que:

$$C_1 = \epsilon_0\frac{A}{d/2} = \frac{2\epsilon_0 A}{d},$$

e:

$$C_2 = \epsilon_0 K\frac{A}{d/2} = \frac{2K\epsilon_0 A}{d}.$$

Além disso, temos para a associação em série:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Assim, substituindo as expressões para C_1 e C_2 na equação acima, encontramos:

$$\rightarrow \boxed{C = 2\epsilon_0\left(\frac{K}{1+K}\right)\frac{A}{d}.}$$

■

(b) Ao ser submetido a uma diferença de potencial V, o capacitor se carrega com uma carga livre Q, dada por:

$$Q = CV = 2\epsilon_0 A\left(\frac{K}{1+K}\right)\frac{V}{d}.$$

Vamos utilizar a lei de Gauss para estabelecer uma relação entre a intensidade do campo elétrico no vácuo (E_v) e a carga livre total armazenada no capacitor. Para isso, considere a placa em contato com o vácuo. Pela simetria do problema é conveniente escolhermos uma superfície gaussiana cilíndrica S, com tampas paralelas à placa. Colocamos uma das tampas no interior da placa condutora, onde $E = 0$, e outra na região de vácuo. Seja A_S a rea de cada tampa. O fluxo de campo elétrico através de S é:

$$\Phi_E^S = \int_S \vec{\boldsymbol{E}}.d\vec{\boldsymbol{A}} = E_v A_S,$$

pois apenas a tampa na região de vácuo contribui para o fluxo. Como a carga livre se distribui uniformemente pela placa, a carga livre total no interior de S é:

$$Q_{int}^S = \sigma A_S,$$

onde $\sigma = Q/A$ é a densidade superficial de carga livre armazenada nas placas. Portanto, pela lei de Gauss:

$$\Phi_E^S = \frac{Q_{int}^S}{\epsilon_0} \rightarrow E_v = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0},$$

$$\rightarrow \boxed{E_v = 2\left(\frac{K}{K+1}\right)\left(\frac{V}{d}\right).}$$

No interior do dielétrico o módulo do campo elétrico E_d é dado por:

$$E_d = E_v/K,$$

assim:

$$\rightarrow \boxed{E_d = 2\left(\frac{1}{K+1}\right)\left(\frac{V}{d}\right).}$$

■