Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2014/1 – Segunda Prova: 12/05/2014
Teste
VERSÃO: $\boxed{\mathsf{A}}$

Formulário

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = I d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad \oint_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = 0\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,,$$

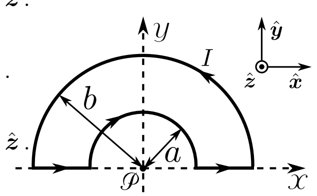
$$\oint_C \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\rm enc} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_{\rm ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}\,, \qquad \Phi_B = LI\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,.$$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Uma barra de comprimento a ocupa uma região onde há um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}}$. A barra gira com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, em torno de um ponto fixo em uma de suas extremidades, em um plano perpendicular ao campo. Qual é o módulo da tensão ou da diferença de potencial que acaba se estabelecendo entre as extremidades da barra?

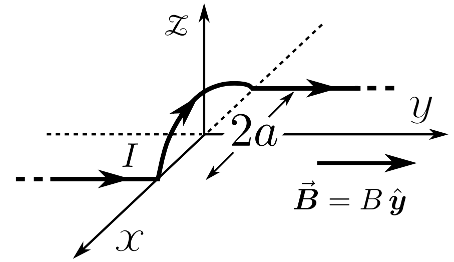
   (a) $\omega a^2 B/4\,.$
   (b) $2\omega a^2 B\,.$
   (c) $\omega a^2 B\,.$
   (d) $\omega a^2 B/2\,.$
   (e) $2\pi\omega a^2 B\,.$
   (f) $\pi\omega a^2 B\,.$
   (g) $0\,.$

2. Calcule o campo magnético no ponto $\mathscr{P}$ devido ao circuito com corrente estacionária de intensidade I.



   (a) $-\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (b) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (d) $\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (e) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (f) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (g) $-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (h) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$

3. Calcule a força magnética resultante sobre o pedaço de fio, através do qual passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I, composto por dois segmentos retilíneos, de comprimento L, muito grande, e uma semicircunferência de círculo, de raio a, na presença de um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{y}}$, $B =$ const $> 0\,.$

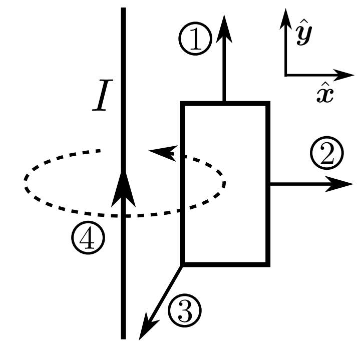


   (a) $2IaB\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (b) $-2IaB\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (c) $2ILB\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (d) $-2ILB\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (e) $2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (f) $-2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (g) $2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (h) $-2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}\,.$

4. Todas as partículas carregadas que passam através de uma região em que existem campos elétrico e magnético constantes, ortogonais, sem serem defletidas têm em comum

   (a) a massa.
   (b) o momento linear.
   (c) a velocidade.
   (d) a energia.
   (e) a razão entre carga e massa.

5. Por um fio retilíneo, muito longo, em repouso, passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I. Próximo a tal fio, há um retângulo condutor, rígido, coplanar com o fio, conforme mostra a figura. Originalmente, o retângulo também encontra-se em repouso, mas, em um certo instante, ele passa a se movimentar em uma das quatro maneiras seguintes: (1) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = v_1\hat{\boldsymbol{y}}$; (2) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = v_2\hat{\boldsymbol{x}}$; (3) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = v_{3x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{3y}\hat{\boldsymbol{y}}$, ou (4) rotação (rígida) em torno do eixo do próprio fio, com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Em qual(is) das quatro situações, **não** surge uma corrente elétrica induzida ao longo do retângulo?



   (a) Somente em 1.
   (b) Somente em 4.
   (c) Somente em 2.
   (d) Somente em 3.
   (e) Em 1 e 4.
   (f) Em 2 e 3.
   (g) Em nenhuma surgirá corrente induzida, pois o campo gerado pelo fio, mantém-se estacionário e a ŕea do retângulo não varia.

6. Um capacitor de placas paralelas, circulares e cujo raio das placas é muito maior que a distância entre as mesmas está inicialmente descarregado. A partir de um certo instante, o capacitor começa a ser carregado por uma corrente que cresce linearmente com o tempo $i(t) = bt$, onde $b =$ const > 0. Sobre os campos elétrico e magnético que podem eventualmente surgir entre as placas durante o carregamento do capacitor pode-se afirmar que:

   (a) surgirá apenas um campo elétrico estacionário.

   (b) surgirão um campo elétrico estacionário e um campo magnético não estacionário, colineares entre si.

   (c) surgirá apenas um campo elétrico não estacionário.

   (d) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, colineares entre si.

   (e) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, perpendiculares entre si.

   (f) surgirão um campo elétrico e um campo magnético, ambos não estacionários, e perpendiculares entre si.

7. Seja um solenóide longo, formado por um enrolamento de espiras circulares. Considere as seguintes três afirmativas sobre sua auto-indutância: (I) ela é proporcional ao quadrado do raio das espiras; (II) ela é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) ela é proporcional à corrente que circula no solenóide. Assinale a opção que indica qual(is) dessas afirmativas está(ão) correta(s).

   (a) Nenhuma das afirmativas está correta.

   (b) Apenas a I.

   (c) Apenas a II.

   (d) Apenas a III.

   (e) Apenas a I e a II.

   (f) Apenas a I e a III.

   (g) Apenas a II e a III.

   (h) Todas as afirmativas estão corretas.

8. Considere as seguintes três afirmações sobre a lei de Ampère: (I) ela só vale quando há um alto grau de simetria da distribuição de correntes; (II) ela só vale quando as correntes forem estacionárias, e (III) ela só vale quando os campos magnéticos forem estacionários. Assinale a alternativa que indica qual(is) de tais afirmações é(são) correta(s).

   (a) Nenhuma afirmação é correta.

   (b) Somente a I.

   (c) Somente a II.

   (d) Somente a III.

   (e) Somente a I e a II.

   (f) Somente a I e a III.

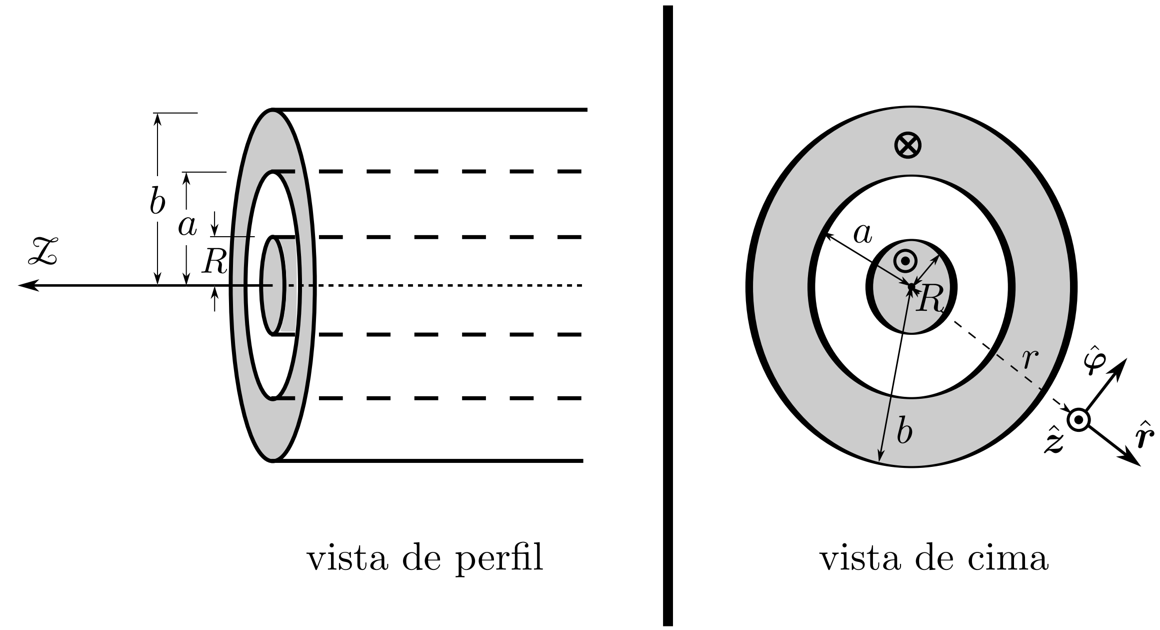
   (g) Somente a II e a III.

   (h) Todas as afirmações são corretas.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,6 pontos] Um cabo coaxial é composto por um fio sólido, cilíndrico, circular, de raio R, envolto por uma casca espessa, cilíndrica, também circular, coaxial, de raios a e b, tais que $R < a < b$. Ambos os cilindros são muito longos e têm o eixo comum $\mathcal{Z}$. Através do fio interno, passa uma corrente elétrica estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\rm int} = Cr\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $C =$ const > 0 e r é a distância até o eixo do fio. Através da casca externa, passa uma corrente estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\rm ext} = -J_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $J_0 =$ const > 0.

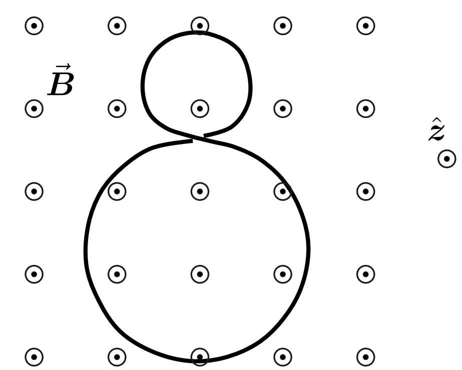


(a) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica no fio interno? [0,6 ponto]
(b) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica na casca externa? [0,4 ponto]
(c) Determine o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ em cada uma das quatro regiões em que o cabo "divide" o espaço. [1,6 ponto]

2. [2,6 pontos] Um pedaço de fio condutor ôhmico isolado é torcido de modo a constituir um circuito em forma de oito. Por razão de simplicidade, modele as duas metades da figura de oito como circunferências de círculo. O raio do círculo superior é a e o do inferior é $2a$. O circuito completo é puramente resistivo (com capacitância e auto-indutância desprezíveis), tendo resistência R. A partir de $t = 0$ s, um campo magnético uniforme, mas não estacionário,

$$\vec{\boldsymbol{B}} = Ct\,\hat{\boldsymbol{z}}\,,$$

onde $C =$ const > 0, é aplicado perpendicularmente ao plano dos dois círculos, conforme mostrado na figura.



(a) Para $t > 0$ s, determine o fluxo total através do circuito. [1,2 ponto]
(b) Para $t > 0$ s, determine o sentido da corrente elétrica induzida ao longo do fio, indicando-o claramente **em cada uma das circunferências**, seja por intermédio de uma seta, seja pelas expressões horário ou anti-horário. [0,6 ponto]
(c) Para $t > 0$ s, determine o módulo da intensidade da corrente elétrica induzida no fio. [0,8 ponto]

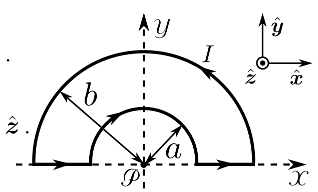
Gabarito para Versão $\boxed{\text{A}}$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Uma barra de comprimento a ocupa uma região onde há um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}}$. A barra gira com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, em torno de um ponto fixo em uma de suas extremidades, em um plano perpendicular ao campo. Qual é o módulo da tensão ou da diferença de potencial que acaba se estabelecendo entre as extremidades da barra?

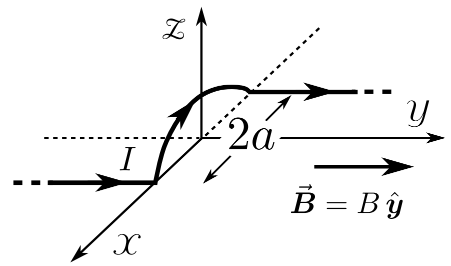
   (a) $\omega a^2 B/4$.
   (b) $2\omega a^2 B$.
   (c) $\omega a^2 B$.
   $\boxed{\text{(d)}}$ $\omega a^2 B/2$.
   (e) $2\pi\omega a^2 B$.
   (f) $\pi\omega a^2 B$.
   (g) 0.

2. Calcule o campo magnético no ponto $\mathscr{P}$ devido ao circuito com corrente estacionária de intensidade I.



   $\boxed{\text{(a)}}$ $-\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (b) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (d) $\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (e) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (f) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (g) $-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (h) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.

3. Calcule a força magnética resultante sobre o pedaço de fio, através do qual passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I, composto por dois segmentos retilíneos, de comprimento L, muito grande, e uma semicircunferência de círculo, de raio a, na presença de um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{y}}$, $B =$ const > 0.

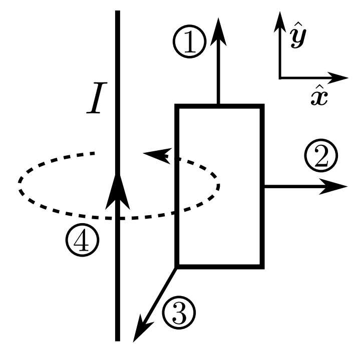


   (a) $2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
   $\boxed{\text{(b)}}$ $-2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (c) $2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (d) $-2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (e) $2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (f) $-2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (g) $2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (h) $-2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.

4. Todas as partículas carregadas que passam através de uma região em que existem campos elétrico e magnético constantes, ortogonais, sem serem defletidas têm em comum

   (a) a massa.
   (b) o momento linear.
   $\boxed{\text{(c)}}$ a velocidade.
   (d) a energia.
   (e) a razão entre carga e massa.

5. Por um fio retilíneo, muito longo, em repouso, passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I. Próximo a tal fio, há um retângulo condutor, rígido, coplanar com o fio, conforme mostra a figura. Originalmente, o retângulo também encontra-se em repouso, mas, em um certo instante, ele passa a se movimentar em uma das quatro maneiras seguintes: (1) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = v_1\hat{\boldsymbol{y}}$; (2) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = v_2\hat{\boldsymbol{x}}$; (3) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = v_{3x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{3y}\hat{\boldsymbol{y}}$, ou (4) rotação (rígida) em torno do eixo do próprio fio, com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Em qual(is) das quatro situações, **não** surge uma corrente elétrica induzida ao longo do retângulo?



   (a) Somente em 1.
   (b) Somente em 4.
   (c) Somente em 2.
   (d) Somente em 3.
   $\boxed{\text{(e)}}$ Em 1 e 4.
   (f) Em 2 e 3.
   (g) Em nenhuma surgirá corrente induzida, pois o campo gerado pelo fio, mantém-se estacionário e a ŕea do retângulo não varia.

6. Um capacitor de placas paralelas, circulares e cujo raio das placas é muito maior que a distância entre as mesmas está inicialmente descarregado. A partir de um certo instante, o capacitor começa a ser carregado por uma corrente que cresce linearmente com o tempo $i(t) = bt$, onde $b =$ const > 0. Sobre os campos elétrico e magnético que podem eventualmente surgir entre as placas durante o carregamento do capacitor pode-se afirmar que:

   (a) surgirá apenas um campo elétrico estacionário.
   (b) surgirão um campo elétrico estacionário e um campo magnético não estacionário, colineares entre si.
   (c) surgirá apenas um campo elétrico não estacionário.

7. Seja um solenóide longo, formado por um enrolamento de espiras circulares. Considere as seguintes três afirmativas sobre sua auto-indutância: (I) ela é proporcional ao quadrado do raio das espiras; (II) ela é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) ela é proporcional à corrente que circula no solenóide. Assinale a opção que indica qual(is) dessas afirmativas está(ão) correta(s).

   (a) Nenhuma das afirmativas está correta.
   $\boxed{\text{(b)}}$ Apenas a I.
   (c) Apenas a II.
   (d) Apenas a III.
   (e) Apenas a I e a II.
   (f) Apenas a I e a III.
   (g) Apenas a II e a III.
   (h) Todas as afirmativas estão corretas.

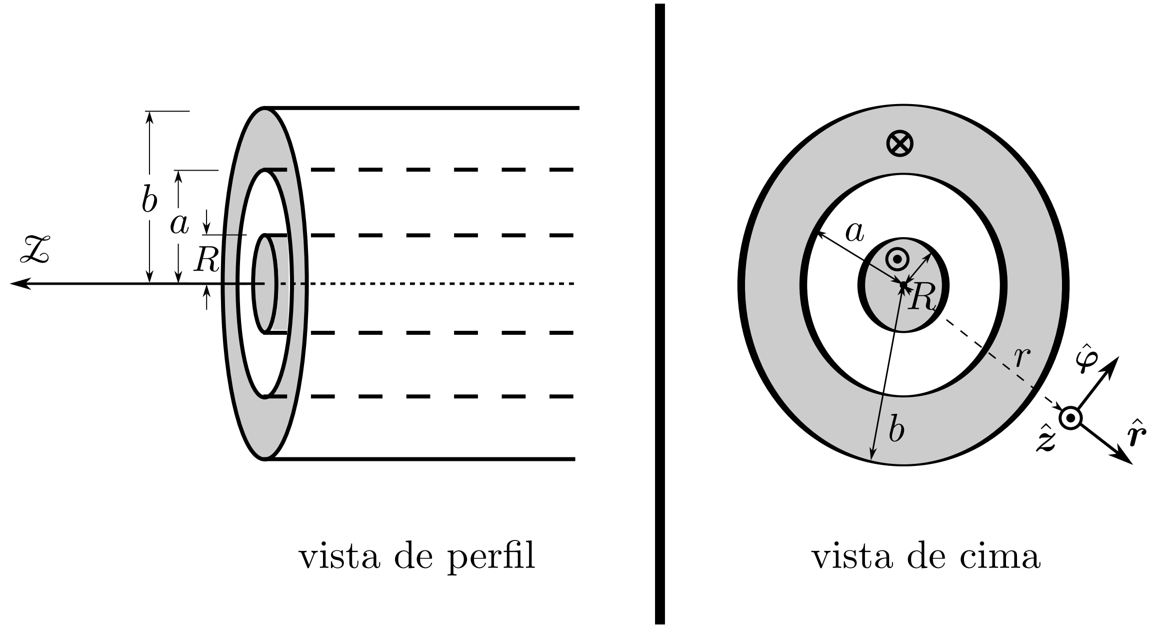
8. Considere as seguintes três afirmações sobre a lei de Ampère: (I) ela só vale quando há um alto grau de simetria da distribuição de correntes; (II) ela só vale quando as correntes forem estacionárias, e (III) ela só vale quando os campos magnéticos forem estacionários. Assinale a alternativa que indica qual(is) de tais afirmações é(são) correta(s).

   $\boxed{\text{(a)}}$ Nenhuma afirmação é correta.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   $\boxed{\text{(g)}}$ Somente a II e a III.
   (h) Todas as afirmações são corretas.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,6 pontos] Um cabo coaxial é composto por um fio sólido, cilíndrico, circular, de raio R, envolto por uma casca espessa, cilíndrica, também circular, coaxial, de raios a e b, tais que $R < a < b$. Ambos os cilindros são muito longos e têm o eixo comum $\mathcal{Z}$. Através do fio interno, passa uma corrente elétrica estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{int}} = Cr\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $C =$ const > 0 e r é a distância até o eixo do fio. Através da casca externa, passa uma corrente estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{ext}} = -J_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $J_0 =$ const > 0.



(a) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica no fio interno? [0,6 ponto]
(b) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica na casca externa? [0,4 ponto]
(c) Determine o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ em cada uma das quatro regiões em que o cabo "divide" o espaço. [1,6 ponto]

Resolução:

(a) [0,6] A intensidade de corrrente elétrica $I[\mathcal{S}]$ através de uma superfície $\mathcal{S}$ e a densidade de corrente elétrica nela, $\vec{\boldsymbol{J}}$, estão relacionadas por

$$I[\mathcal{S}] = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA\,.$$

Logo, para uma seção reta do fio interno, temos

$$\begin{aligned} I_{\text{int}} &= \int_{\mathcal{S}_{\text{int}}} Cr\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\text{int}}} Cr\, 2\pi r\, dr \\ &= 2\pi C \int_{r=0}^{R} r^2\, dr\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{int}} = \frac{2}{3}\pi C R^3\,.} \tag{1}$$

■

(b) [0,4] Na casca externa, temos

$$\begin{aligned} I_{\text{ext}} &= \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} J_{\text{ext}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} (-J_0\,\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dA \\ &= -J_0 \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} dA \\ &= -J_0 A_{\text{ext}}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ext}} = -J_0\pi(b^2 - a^2)\,.} \tag{2}$$

■

(c) [1,6] Devido à simetria cilíndrica da distribuição estacionária de corrente e à lei de Gauss do magnetismo, em qualquer uma das quatro regiões, o campo magnético, só terá componente azimutal (circular), ou seja,[1]

$$\vec{\boldsymbol{B}}(r,\varphi) = B_\varphi(r)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)\,.$$

Isso tudo sugere, pois, que usemos a lei de Ampère e que tomemos, como curva ampèriana, uma circunferência de círculo, concêntrico com o eixo da distribuição de corrente e perpendicular ao seu eixo, de raio genérico r. Assim, a expressão funcional para a circulação do campo magnético ao longo da ampériana fica, em qualquer uma das quatro regiões, igual a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathcal{C}] &:= \oint_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} B_\varphi(r)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) \cdot d\ell_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} B_\varphi(r) d\ell_\varphi \\ &= B_\varphi(r) \oint_{\mathcal{C}} d\ell_\varphi\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathcal{C}] = 2\pi r B_\varphi(r)\,.$$

A intensidade de corrente encerrada pela curva ampèriana dependerá, contudo, da região em questão. De fato,

- $\underline{0 \le r \le R}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela Eq. (1), contanto que, nela, troquemos R por r, ou seja:

$$\begin{aligned} I_{enc}(r) &= I_{\text{int}}(r) \\ &= \frac{2}{3}\pi C r^3\,. \end{aligned}$$

[1]A rigor, ainda poderia haver uma componente axial constante, que, suporemos nula, como usual.

Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r)2\pi r = \frac{2}{3}\mu_0 \pi C r^3\,,$$

e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{3}\mu_0 C r^2\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

- $\underline{R \le r \le a}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\rm enc}(r)$ é dada pela corrente toda do fio interno, ou seja, pela Eq. (1):

$$\begin{aligned} I_{\rm enc}(r) &= I_{\rm int} \\ &= \frac{2}{3}\pi C R^3\,. \end{aligned}$$

Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r)2\pi r = \frac{2}{3}\mu_0 \pi C R^3\,,$$

e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I_{\rm int}}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{3}\frac{\mu_0 C R^3}{r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

- $\underline{a \le r \le b}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\rm enc}(r)$ é dada pela corrente do fio interno mais a corrente na casca externa, Eq, (2), contanto que, nessa última, troquemos b por r, ou seja:

$$\begin{aligned} I_{\rm enc}(r) &= I_{\rm int} + I_{\rm ext}(r) \\ &= \frac{2}{3}\pi C R^3 - J_0\pi(r^2 - a^2)\,. \end{aligned}$$

Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r)2\pi r = \mu_0\pi\left[\frac{2}{3}\pi C R^3 - J_0(r^2 - a^2)\right]\,,$$

e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\left[\frac{1}{3}\frac{C R^3}{r} - \frac{1}{2}J_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\right]\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

- $\underline{b \le r < \infty}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\rm enc}(r)$ é dada pela corrente total, Eq. (1) + Eq. (2), do fio interno mais a corrente na casca externa, ou seja:

$$I_{\rm enc}(r) = I_{\rm int} + I_{\rm ext}\,.$$

Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r)2\pi r = \mu_0(I_{\rm int} + I_{\rm ext})\,,$$

e, finalmente,

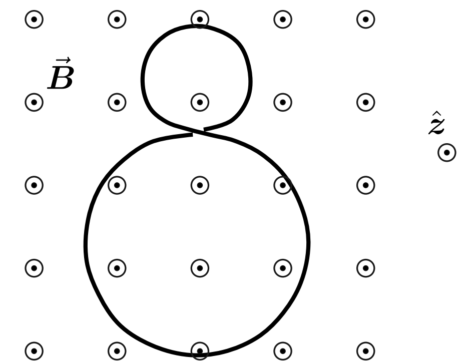
$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\frac{I_{\rm int} + I_{\rm ext}}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

■

2. [2,6 pontos] Um pedaço de fio condutor ôhmico isolado é torcido de modo a constituir um circuito em forma de oito. Por razão de simplicidade, modele as duas metades da figura de oito como circunferências de círculo. O raio do círculo superior é a e o do inferior é $2a$. O circuito completo é puramente resistivo (com capacitância e auto-indutância desprezíveis), tendo resistência R. A partir de $t = 0$ s, um campo magnético uniforme, mas não estacionário,

$$\vec{\boldsymbol{B}} = Ct\,\hat{\boldsymbol{z}}\,,$$

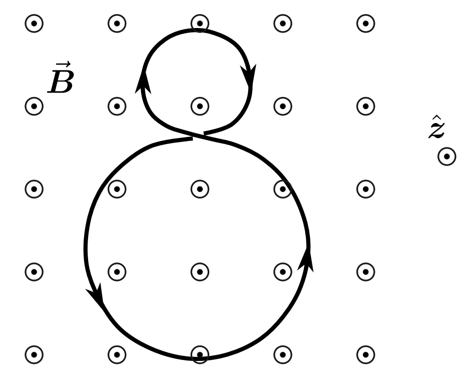
onde C = const > 0, é aplicado perpendicularmente ao plano dos dois círculos, conforme mostrado na figura.



(a) Para $t > 0$ s, determine o fluxo total através do circuito. [1,2 ponto]
(b) Para $t > 0$ s, determine o sentido da corrente elétrica induzida ao longo do fio, indicando-o claramente **em cada uma das circunferências**, seja por intermédio de uma seta, seja pelas expressões horário ou anti-horário. [0,6 ponto]
(c) Para $t > 0$ s, determine o módulo da intensidade da corrente elétrica induzida no fio. [0,8 ponto]

Resolução:

(a) [1,2] Tomaremos como orientação positiva da curva $\mathcal{C}$ que modela o circuito aquela indicada na figura, de modo que os versores nas suas partes inferior e superior são dados por



$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}}_{\rm sup} &= -\hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{n}}_{\rm inf} &= \hat{\boldsymbol{z}}\,. \end{aligned}$$

Então, o fluxo através do círculo superior é

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\text{sup}} &:= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} (Ct\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\text{sup}}\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} (Ct\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (-\hat{\boldsymbol{z}})\, dA \\
&= -Ct \int_{;S_{\text{sup}}} dA \\
&= -CtA_{\text{sup}} \\
&= -\pi Cta^2 \,.
\end{aligned}
$$

Analgoamente, para o fluxo através do círculo inferior, temos

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\text{inf}} &= CtA_{\text{inf}} \\
&= 4\pi Cta^2 \,.
\end{aligned}
$$

Logo, o fluxo total através do circuito é

$$\Phi = \Phi_{\text{sup}} + \Phi_{\text{inf}}$$

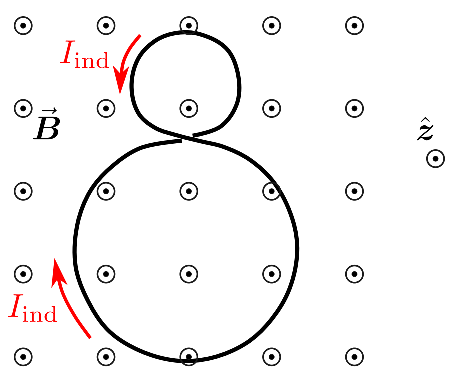
ou seja,

$$\boxed{\Phi = 3\pi Ca^2 t\,.} \tag{3}$$

■

(b) [0,6 ponto] Como, nitidamente, o módulo do fluxo está aumentando e a maior contribuição para ele vem do círculo inferior, deverá surgir, pela lei de Lenz, uma corrente induzida que parcialmente cancelará, por intermédio do correspondente campo magnético "induzido", no centro do círculo inferior, o campo magnético externo. Isso implica que a corrente induzida terá o sentido indicado pelas setas na figura a seguir, ou ainda,

- <u>circunferência inferior</u>: sentido **horário**
- <u>circunferência superior</u>: sentido **anti-horário**.



■

(c) [0,8] Pela lei de Faraday, temos que a força eletromotriz (fem) induzida ao longo do circuito é, tendo em vista a Eq. (3),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{ind}}[\mathcal{C}] &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
&= -3\pi Ca^2 \,.
\end{aligned}
$$

Como o circuito é puramente resistivo e satisfaz a lei de Ohm, temos que a corrente elétrica induzida vale

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R}\,,$$

ou seja,

$$\boxed{|I_{\text{ind}}| = \frac{3\pi Ca^2}{R}\,.}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2014/1 – Segunda Prova: 12/05/2014
Teste
VERSÃO: $\boxed{\text{B}}$

Formulário

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = q\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,,\qquad d\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = I d\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,,\qquad \oint_S \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = 0\,,\qquad d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,,$$

$$\oint_C \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\rm enc} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\,,\qquad \mathcal{E}_{\rm ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}\,,\qquad \Phi_B = LI\,,\qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,.$$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

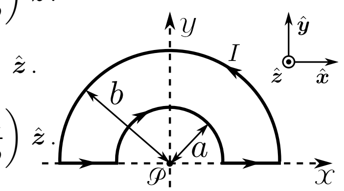
1. Uma barra de comprimento a ocupa uma região onde há um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}}$. A barra gira com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, em torno de um ponto fixo em uma de suas extremidades, em um plano perpendicular ao campo. Qual é o módulo da tensão ou da diferença de potencial que acaba se estabelecendo entre as extremidades da barra?

   (a) $\omega a^2 B/4\,.$
   (b) $2\omega a^2 B\,.$
   (c) $\omega a^2 B\,.$
   (d) $\omega a^2 B/2\,.$
   (e) $2\pi\omega a^2 B\,.$
   (f) $\pi\omega a^2 B\,.$
   (g) $0\,.$

2. Um capacitor de placas paralelas, circulares e cujo raio das placas é muito maior que a distância entre as mesmas está inicialmente descarregado. A partir de um certo instante, o capacitor começa a ser carregado por uma corrente que cresce linearmente com o tempo $i(t) = bt$, onde $b = \text{ const } > 0$. Sobre os campos elétrico e magnético que podem eventualmente surgir entre as placas durante o carregamento do capacitor pode-se afirmar que:

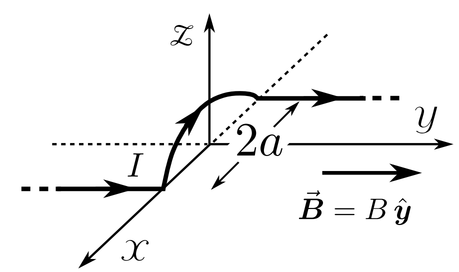
   (a) surgirá apenas um campo elétrico estacionário.
   (b) surgirão um campo elétrico estacionário e um campo magnético não estacionário, colineares entre si.
   (c) surgirá apenas um campo elétrico não estacionário.
   (d) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, colineares entre si.
   (e) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, perpendiculares entre si.
   (f) surgirão um campo elétrico e um campo magnético, ambos não estacionários, e perpendiculares entre si.

3. Calcule o campo magnético no ponto $\mathscr{P}$ devido ao circuito com corrente estacionária de intensidade I.



   (a) $-\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (b) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (d) $\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (e) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (f) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (g) $-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (h) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$

4. Calcule a força magnética resultante sobre o pedaço de fio, através do qual passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I, composto por dois segmentos retilíneos, de comprimento L, muito grande, e uma semicircunferência de círculo, de raio a, na presença de um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{y}}$, $B = \text{ const} > 0\,.$



   (a) $2IaB\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (b) $-2IaB\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (c) $2ILB\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (d) $-2ILB\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (e) $2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (f) $-2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (g) $2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (h) $-2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}\,.$

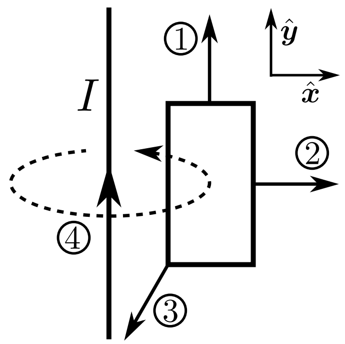
5. Todas as partículas carregadas que passam através de uma região em que existem campos elétrico e magnético constantes, ortogonais, sem serem defletidas têm em comum

   (a) a massa.
   (b) o momento linear.
   (c) a velocidade.
   (d) a energia.
   (e) a razão entre carga e massa.

6. Seja um solenóide longo, formado por um enrolamento de espiras circulares. Considere as seguintes três afirmativas sobre sua auto-indutância: (I) ela é proporcional ao quadrado do raio das espiras; (II) ela é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) ela é proporcional à corrente que circula no solenóide. Assinale a opção que indica qual(is) dessas afirmativas está(ão) correta(s).

   (a) Nenhuma das afirmativas está correta.
   (b) Apenas a I.
   (c) Apenas a II.
   (d) Apenas a III.
   (e) Apenas a I e a II.
   (f) Apenas a I e a III.
   (g) Apenas a II e a III.
   (h) Todas as afirmativas estão corretas.

7. Por um fio retilíneo, muito longo, em repouso, passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I. Próximo a tal fio, há um retângulo condutor, rígido, coplanar com o fio, conforme mostra a figura. Originalmente, o retângulo também encontra-se em repouso, mas, em um certo instante, ele passa a se movimentar em uma das quatro maneiras seguintes: (1) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = v_1\hat{\boldsymbol{y}}$; (2) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = v_2\hat{\boldsymbol{x}}$; (3) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = v_{3x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{3y}\hat{\boldsymbol{y}}$, ou (4) rotação (rígida) em torno do eixo do próprio fio, com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Em qual(is) das quatro situações, **não** surge uma corrente elétrica induzida ao longo do retângulo?



(a) Somente em 1.
(b) Somente em 4.
(c) Somente em 2.
(d) Somente em 3.
(e) Em 1 e 4.
(f) Em 2 e 3.
(g) Em nenhuma surgirá corrente induzida, pois o campo gerado pelo fio, mantém-se estacionário e a ŕea do retângulo não varia.

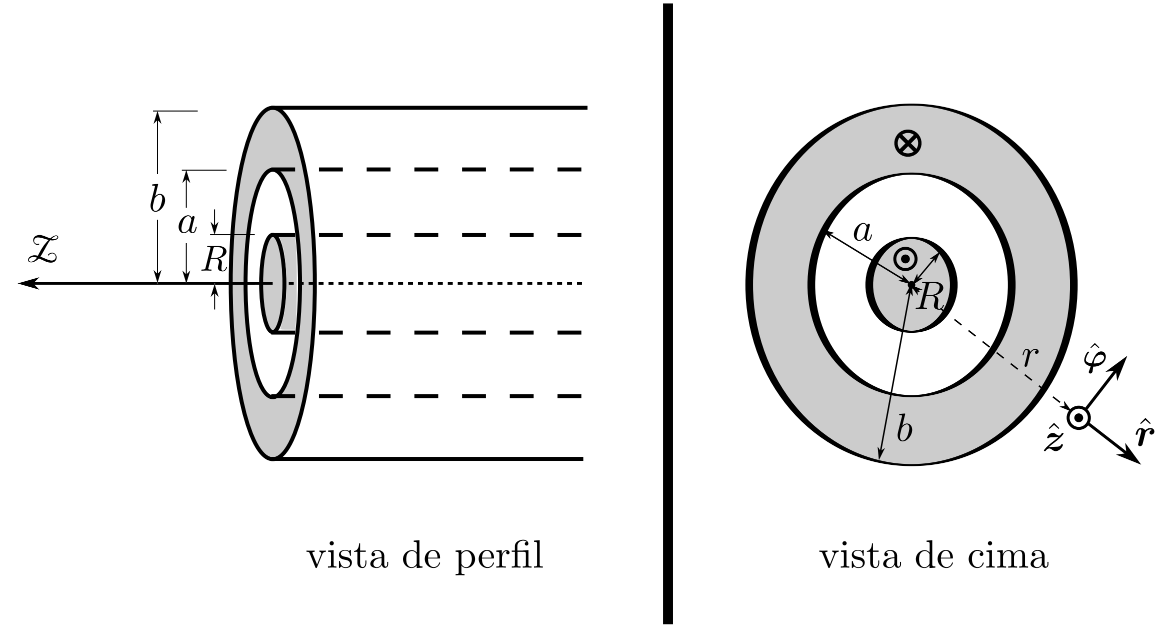
8. Considere as seguintes três afirmações sobre a lei de Ampère: (I) ela só vale quando há um alto grau de simetria da distribuição de correntes; (II) ela só vale quando as correntes forem estacionárias, e (III) ela só vale quando os campos magnéticos forem estacionários. Assinale a alternativa que indica qual(is) de tais afirmações é(são) correta(s).

(a) Nenhuma afirmação é correta.
(b) Somente a I.
(c) Somente a II.
(d) Somente a III.
(e) Somente a I e a II.
(f) Somente a I e a III.
(g) Somente a II e a III.
(h) Todas as afirmações são corretas.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,6 pontos] Um cabo coaxial é composto por um fio sólido, cilíndrico, circular, de raio R, envolto por uma casca espessa, cilíndrica, também circular, coaxial, de raios a e b, tais que $R < a < b$. Ambos os cilindros são muito longos e têm o eixo comum $\mathcal{Z}$. Através do fio interno, passa uma corrente elétrica estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{int}} = Cr\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $C =$ const > 0 e r é a distância até o eixo do fio. Através da casca externa, passa uma corrente estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{ext}} = -J_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $J_0 =$ const > 0.

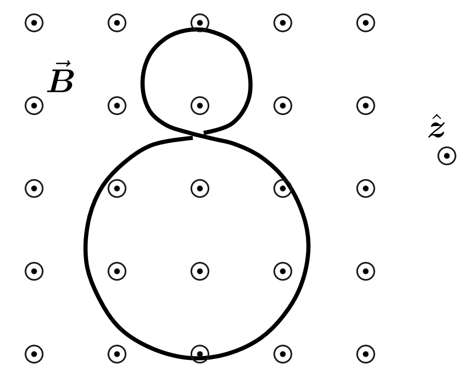


(a) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica no fio interno? [0,6 ponto]
(b) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica na casca externa? [0,4 ponto]
(c) Determine o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ em cada uma das quatro regiões em que o cabo "divide" o espaço. [1,6 ponto]

2. [2,6 pontos] Um pedaço de fio condutor ôhmico isolado é torcido de modo a constituir um circuito em forma de oito. Por razão de simplicidade, modele as duas metades da figura de oito como circunferências de círculo. O raio do círculo superior é a e o do inferior é $2a$. O circuito completo é puramente resistivo (com capacitância e auto-indutância desprezíveis), tendo resistência R. A partir de $t = 0$ s, um campo magnético uniforme, mas não estacionário,

$$\vec{\boldsymbol{B}} = Ct\,\hat{\boldsymbol{z}}\,,$$

onde $C =$ const > 0, é aplicado perpendicularmente ao plano dos dois círculos, conforme mostrado na figura.



(a) Para $t > 0$ s, determine o fluxo total através do circuito. [1,2 ponto]
(b) Para $t > 0$ s, determine o sentido da corrente elétrica induzida ao longo do fio, indicando-o claramente **em cada uma das circunferências**, seja por intermédio de uma seta, seja pelas expressões horário ou anti-horário. [0,6 ponto]
(c) Para $t > 0$ s, determine o módulo da intensidade da corrente elétrica induzida no fio. [0,8 ponto]

Gabarito para Versão $\boxed{\text{B}}$

Seção 1. Múltipla escolha ($8 \times 0{,}6 = 4{,}8$ pontos)

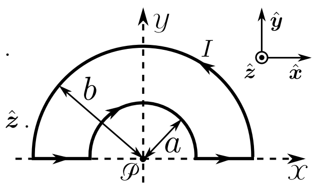
1. Uma barra de comprimento a ocupa uma região onde há um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}}$. A barra gira com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, em torno de um ponto fixo em uma de suas extremidades, em um plano perpendicular ao campo. Qual é o módulo da tensão ou da diferença de potencial que acaba se estabelecendo entre as extremidades da barra?

   (a) $\omega a^2 B/4$.
   (b) $2\omega a^2 B$.
   (c) $\omega a^2 B$.
   $\boxed{\text{(d)}}$ $\omega a^2 B/2$.
   (e) $2\pi\omega a^2 B$.
   (f) $\pi\omega a^2 B$.
   (g) 0 .

2. Um capacitor de placas paralelas, circulares e cujo raio das placas é muito maior que a distância entre as mesmas está inicialmente descarregado. A partir de um certo instante, o capacitor começa a ser carregado por uma corrente que cresce linearmente com o tempo $i(t) = bt$, onde $b =$ const > 0. Sobre os campos elétrico e magnético que podem eventualmente surgir entre as placas durante o carregamento do capacitor pode-se afirmar que:

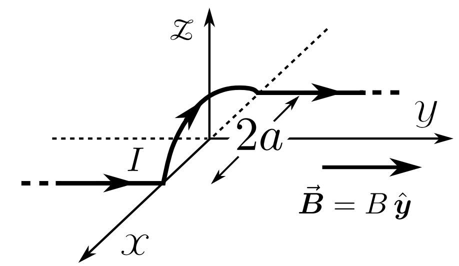
   (a) surgirá apenas um campo elétrico estacionário.
   (b) surgirão um campo elétrico estacionário e um campo magnético não estacionário, colineares entre si.
   (c) surgirá apenas um campo elétrico não estacionário.
   (d) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, colineares entre si.
   (e) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, perpendiculares entre si.
   $\boxed{\text{(f)}}$ surgirão um campo elétrico e um campo magnético, ambos não estacionários, e perpendiculares entre si.

3. Calcule o campo magnético no ponto $\mathscr{P}$ devido ao circuito com corrente estacionária de intensidade I.



   $\boxed{\text{(a)}}$ $-\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (b) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (d) $\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (e) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (f) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (g) $-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (h) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.

4. Calcule a força magnética resultante sobre o pedaço de fio, através do qual passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I, composto por dois segmentos retilíneos, de comprimento L, muito grande, e uma semicircunferência de círculo, de raio a, na presença de um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{y}}$, $B =$ const > 0 .



   (a) $2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
   $\boxed{\text{(b)}}$ $-2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (c) $2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (d) $-2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (e) $2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (f) $-2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (g) $2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (h) $-2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.

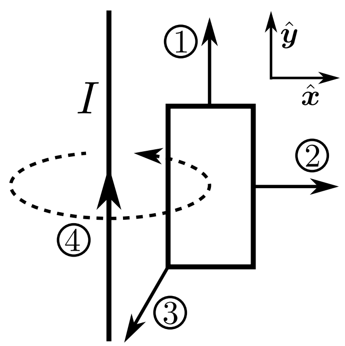
5. Todas as partículas carregadas que passam através de uma região em que existem campos elétrico e magnético constantes, ortogonais, sem serem defletidas têm em comum

   (a) a massa.
   (b) o momento linear.
   $\boxed{\text{(c)}}$ a velocidade.
   (d) a energia.
   (e) a razão entre carga e massa.

6. Seja um solenóide longo, formado por um enrolamento de espiras circulares. Considere as seguintes três afirmativas sobre sua auto-indutância: (I) ela é proporcional ao quadrado do raio das espiras; (II) ela é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) ela é proporcional à corrente que circula no solenóide. Assinale a opção que indica qual(is) dessas afirmativas está(ão) correta(s).

   (a) Nenhuma das afirmativas está correta.
   $\boxed{\text{(b)}}$ Apenas a I.
   (c) Apenas a II.
   (d) Apenas a III.
   (e) Apenas a I e a II.
   (f) Apenas a I e a III.
   (g) Apenas a II e a III.
   (h) Todas as afirmativas estão corretas.

7. Por um fio retilíneo, muito longo, em repouso, passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I. Próximo a tal fio, há um retângulo condutor, rígido, coplanar com o fio, conforme mostra a figura. Originalmente, o retângulo também encontra-se em repouso, mas, em um certo instante, ele passa a se movimentar em uma das quatro maneiras seguintes: (1) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = v_1\hat{\boldsymbol{y}}$; (2) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = v_2\hat{\boldsymbol{x}}$; (3) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = v_{3x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{3y}\hat{\boldsymbol{y}}$, ou (4) rotação (rígida) em torno do eixo do próprio fio, com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Em qual(is) das quatro situações, **não** surge uma corrente elétrica induzida ao longo do retângulo?



(a) Somente em 1.
(b) Somente em 4.
(c) Somente em 2.
(d) Somente em 3.
$\boxed{\text{(e)}}$ Em 1 e 4.
(f) Em 2 e 3.
(g) Em nenhuma surgirá corrente induzida, pois o campo gerado pelo fio, mantém-se estacionário e a íea do retângulo não varia.

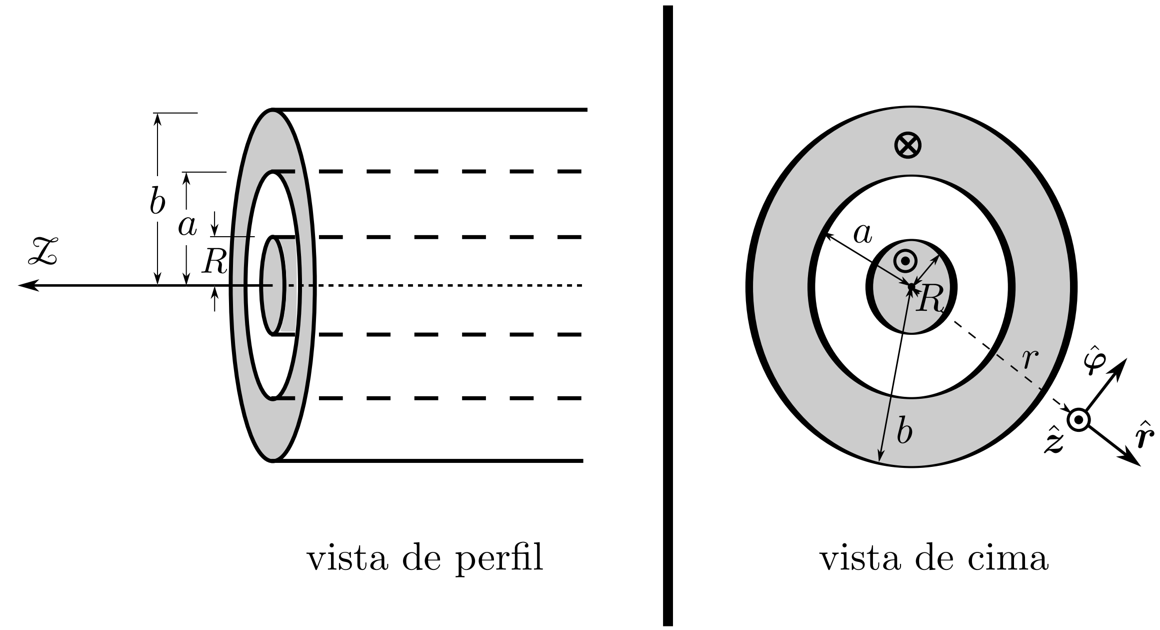
8. Considere as seguintes três afirmações sobre a lei de Ampère: (I) ela só vale quando há um alto grau de simetria da distribuição de correntes; (II) ela só vale quando as correntes forem estacionárias, e (III) ela só vale quando os campos magnéticos forem estacionários. Assinale a alternativa que indica qual(is) de tais afirmações é(são) correta(s).

$\boxed{\text{(a)}}$ Nenhuma afirmação é correta.
(b) Somente a I.
(c) Somente a II.
(d) Somente a III.
(e) Somente a I e a II.
(f) Somente a I e a III.
$\boxed{\text{(g)}}$ Somente a II e a III.
(h) Todas as afirmações são corretas.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,6 pontos] Um cabo coaxial é composto por um fio sólido, cilíndrico, circular, de raio R, envolto por uma casca espessa, cilíndrica, também circular, coaxial, de raios a e b, tais que $R < a < b$. Ambos os cilindros são muito longos e têm o eixo comum $\mathcal{Z}$. Através do fio interno, passa uma corrente elétrica estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\rm int} = Cr\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $C=$ const >0 e r é a distância até o eixo do fio. Através da casca externa, passa uma corrente estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\rm ext} = -J_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $J_0 =$ const > 0.



(a) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica no fio interno? [0,6 ponto]
(b) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica na casca externa? [0,4 ponto]
(c) Determine o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ em cada uma das quatro regiões em que o cabo "divide" o espaço. [1,6 ponto]

Resolução:

(a) [0,6] A intensidade de corrrente elétrica $I[\mathcal{S}]$ através de uma superfície $\mathcal{S}$ e a densidade de corrente elétrica nela, $\vec{\boldsymbol{J}}$, estão relacionadas por

$$I[\mathcal{S}] = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dA\,.$$

Logo, para uma seção reta do fio interno, temos

$$\begin{aligned} I_{\rm int} &= \int_{\mathcal{S}_{\rm int}} Cr\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\rm int}} Cr\,2\pi r\,dr \\ &= 2\pi C\int_{r=0}^{R} r^2\,dr\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\rm int} = \frac{2}{3}\pi C R^3\,.} \qquad (1)$$

■

(b) [0,4] Na casca externa, temos

$$\begin{aligned} I_{\text{ext}} &= \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} J_{\text{ext}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} (-J_0\, \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dA \\ &= -J_0 \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} dA \\ &= -J_0 A_{\text{ext}}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ext}} = -J_0 \pi (b^2 - a^2)\,.} \tag{2}$$

■

(c) [1,6] Devido à simetria cilíndrica da distribuição estacionária de corrente e à lei de Gauss do magnetismo, em qualquer uma das quatro regiões, o campo magnético, só terá componente azimutal (circular), ou seja,[2]

$$\vec{\boldsymbol{B}}(r,\varphi) = B_\varphi(r)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)\,.$$

Isso tudo sugere, pois, que usemos a lei de Ampère e que tomemos, como curva ampèriana, uma circunferência de círculo, concêntrico com o eixo da distribuição de corrente e perpendicular ao seu eixo, de raio genérico r. Assim, a expressão funcional para a circulação do campo magnético ao longo da ampériana fica, em qualquer uma das quatro regiões, igual a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathcal{C}] &:= \oint_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} B_\varphi(r)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) \cdot d\ell_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} B_\varphi(r) d\ell_\varphi \\ &= B_\varphi(r) \oint_{\mathcal{C}} d\ell_\varphi\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathcal{C}] = 2\pi r B_\varphi(r)\,.$$

A intensidade de corrente encerrada pela curva ampèriana dependerá, contudo, da região em questão. De fato,

- $\underline{0 \le r \le R}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela Eq. (1), contanto que, nela, troquemos R por r, ou seja:

$$\begin{aligned} I_{enc}(r) &= I_{\text{int}}(r) \\ &= \frac{2}{3}\pi C r^3\,. \end{aligned}$$

  Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r) 2\pi r = \frac{2}{3}\mu_0 \pi C r^3\,,$$

  e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{3}\mu_0 C r^2\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

[2] A rigor, ainda poderia haver uma componente axial constante, que, suporemos nula, como usual.

- $\underline{R \le r \le a}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela corrente toda do fio interno, ou seja, pela Eq. (1):

$$\begin{aligned} I_{\text{enc}}(r) &= I_{\text{int}} \\ &= \frac{2}{3}\pi C R^3\,. \end{aligned}$$

  Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r) 2\pi r = \frac{2}{3}\mu_0 \pi C R^3\,,$$

  e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{3}\frac{\mu_0 C R^3}{r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

- $\underline{a \le r \le b}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela corrente do fio interno mais a corrente na casca externa, Eq. (2), contanto que, nessa última, troquemos b por r, ou seja:

$$\begin{aligned} I_{\text{enc}}(r) &= I_{\text{int}} + I_{\text{ext}}(r) \\ &= \frac{2}{3}\pi C R^3 - J_0 \pi (r^2 - a^2)\,. \end{aligned}$$

  Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r) 2\pi r = \mu_0 \pi \left[\frac{2}{3}\pi C R^3 - J_0 (r^2 - a^2)\right]\,,$$

  e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \left[\frac{1}{3}\frac{C R^3}{r} - \frac{1}{2} J_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\right]\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

- $\underline{b \le r < \infty}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela corrente total, Eq. (1) + Eq. (2), do fio interno mais a corrente na casca externa, ou seja:

$$I_{\text{enc}}(r) = I_{\text{int}} + I_{\text{ext}}\,.$$

  Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r) 2\pi r = \mu_0 (I_{\text{int}} + I_{\text{ext}})\,,$$

  e, finalmente,

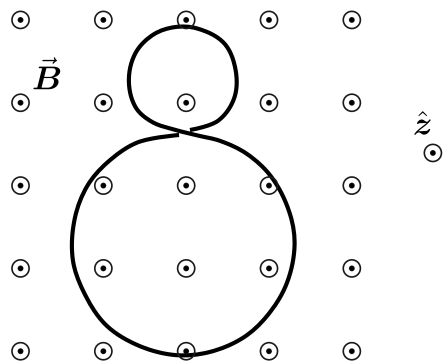
$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \frac{I_{\text{int}} + I_{\text{ext}}}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

■

2. [2,6 pontos] Um pedaço de fio condutor ôhmico isolado é torcido de modo a constituir um circuito em forma de oito. Por razão de simplicidade, modele as duas metades da figura de oito como circunferências de círculo. O raio do círculo superior é a e o do inferior é $2a$. O circuito completo é puramente resistivo (com capacitância e auto-indutância desprezíveis), tendo resistência R. A partir de $t = 0$ s, um campo magnético uniforme, mas não estacionário,

$$\vec{\boldsymbol{B}} = Ct\,\hat{\boldsymbol{z}}\,,$$

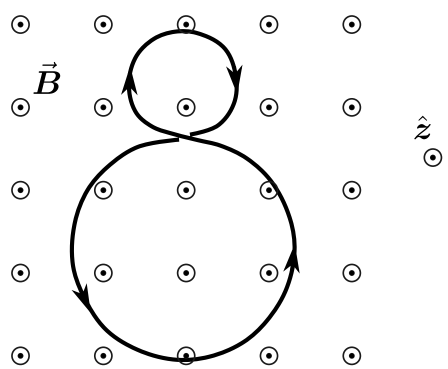
onde $C = \text{const} > 0$, é aplicado perpendicularmente ao plano dos dois círculos, conforme mostrado na figura.



(a) Para $t > 0$ s, determine o fluxo total através do circuito. [1,2 ponto]
(b) Para $t > 0$ s, determine o sentido da corrente elétrica induzida ao longo do fio, indicando-o claramente **em cada uma das circunferências**, seja por intermédio de uma seta, seja pelas expressões horário ou anti-horário. [0,6 ponto]
(c) Para $t > 0$ s, determine o módulo da intensidade da corrente elétrica induzida no fio. [0,8 ponto]

Resolução:

(a) [1,2] Tomaremos como orientação positiva da curva $\mathcal{C}$ que modela o circuito aquela indicada na figura, de modo que os versores nas suas partes inferior e superior são dados por



$$\hat{\boldsymbol{n}}_{\text{sup}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\hat{\boldsymbol{n}}_{\text{inf}} = \hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

Então, o fluxo através do círculo superior é

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{sup}} &:= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} (Ct\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\text{sup}}\, dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} (Ct\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (-\hat{\boldsymbol{z}})\, dA \\ &= -Ct \int_{;S_{\text{sup}}} dA \\ &= -CtA_{\text{sup}} \\ &= -\pi Cta^2\,.\end{aligned}$$

Analgoamente, para o fluxo através do círculo inferior, temos

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{inf}} &= CtA_{\text{inf}} \\ &= 4\pi Cta^2\,.\end{aligned}$$

Logo, o fluxo total através do circuito é

$$\Phi = \Phi_{\text{sup}} + \Phi_{\text{inf}}$$

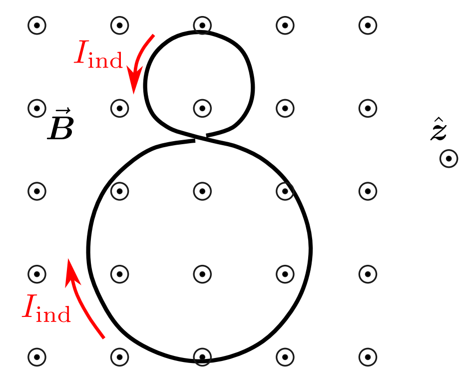
ou seja,

$$\boxed{\Phi = 3\pi Ca^2 t\,.} \tag{3}$$

■

(b) [0,6 ponto] Como, nitidamente, o módulo do fluxo está aumentando e a maior contribuição para ele vem do círculo inferior, deverá surgir, pela lei de Lenz, uma corrente induzida que parcialmente cancelará, por intermédio do correspondente campo magnético "induzido", no centro do círculo inferior, o campo magnético externo. Isso implica que a corrente induzida terá o sentido indicado pelas setas na figura a seguir, ou ainda,

- circunferência inferior: sentido **horário**
- circunferência superior: sentido **anti-horário**.



■

(c) [0,8] Pela lei de Faraday, temos que a força eletromotriz (fem) induzida ao longo do circuito é, tendo em vista a Eq. (3),

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\rm ind}[C] &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -3\pi C a^2\,.\end{aligned}$$

Como o circuito é puramente resistivo e satisfaz a lei de Ohm, temos que a corrente elétrica induzida vale

$$I_{\rm ind} = \frac{\mathcal{E}_{\rm ind}}{R}\,,$$

ou seja,

$$\boxed{|I_{\rm ind}| = \frac{3\pi C a^2}{R}\,.}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2014/1 – Segunda Prova: 12/05/2014
Teste
VERSÃO: $\boxed{\text{C}}$

Formulário

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = I d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad \oint_S \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = 0\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,,$$

$$\oint_C \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\rm enc} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_{\rm ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}\,, \qquad \Phi_B = LI\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,.$$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Um capacitor de placas paralelas, circulares e cujo raio das placas é muito maior que a distância entre as mesmas está inicialmente descarregado. A partir de um certo instante, o capacitor começa a ser carregado por uma corrente que cresce linearmente com o tempo $i(t) = bt$, onde $b =$ const > 0. Sobre os campos elétrico e magnético que podem eventualmente surgir entre as placas durante o carregamento do capacitor pode-se afirmar que:

   (a) surgirá apenas um campo elétrico estacionário.

   (b) surgirão um campo elétrico estacionário e um campo magnético não estacionário, colineares entre si.

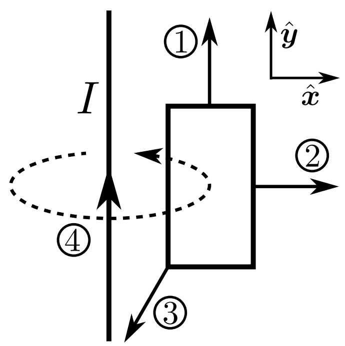
   (c) surgirá apenas um campo elétrico não estacionário.

   (d) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, colineares entre si.

   (e) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, perpendiculares entre si.

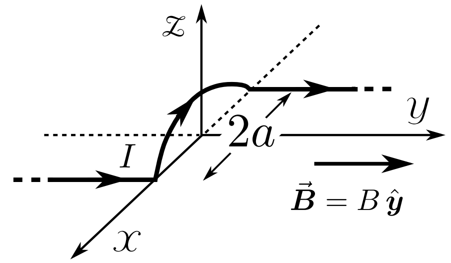
   (f) surgirão um campo elétrico e um campo magnético, ambos não estacionários, e perpendiculares entre si.

2. Por um fio retilíneo, muito longo, em repouso, passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I. Próximo a tal fio, há um retângulo condutor, rígido, coplanar com o fio, conforme mostra a figura. Originalmente, o retângulo também encontra-se em repouso, mas, em um certo instante, ele passa a se movimentar em uma das quatro maneiras seguintes: (1) translação com velocidade $\boldsymbol{\vec{v}}_1 = v_1\boldsymbol{\hat{y}}$; (2) translação com velocidade $\boldsymbol{\vec{v}}_2 = v_2\boldsymbol{\hat{x}}$; (3) translação com velocidade $\boldsymbol{\vec{v}}_3 = v_{3x}\boldsymbol{\hat{x}} + v_{3y}\boldsymbol{\hat{y}}$, ou (4) rotação (rígida) em torno do eixo do próprio fio, com velocidade angular $\boldsymbol{\vec{\omega}} = \omega\boldsymbol{\hat{z}}$. Em qual(is) das quatro situações, **não** surge uma corrente elétrica induzida ao longo do retângulo?



(a) Somente em 1.
(b) Somente em 4.
(c) Somente em 2.
(d) Somente em 3.
(e) Em 1 e 4.
(f) Em 2 e 3.
(g) Em nenhuma surgirá corrente induzida, pois o campo gerado pelo fio, mantém-se estacionário e a ŕea do retângulo não varia.

3. Calcule a força magnética resultante sobre o pedaço de fio, através do qual passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I, composto por dois segmentos retilíneos, de comprimento L, muito grande, e uma semicircunferência de círculo, de raio a, na presença de um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\boldsymbol{\vec{B}} = B\boldsymbol{\hat{y}}$, $B =$ const > 0.



(a) $2IaB\boldsymbol{\hat{z}}$.
(b) $-2IaB\boldsymbol{\hat{z}}$.
(c) $2ILB\boldsymbol{\hat{z}}$.
(d) $-2ILB\boldsymbol{\hat{z}}$.
(e) $2I(a+L)B\boldsymbol{\hat{z}}$.
(f) $-2I(a+L)B\boldsymbol{\hat{z}}$.
(g) $2I(a-L)B\boldsymbol{\hat{z}}$.
(h) $-2I(a-L)B\boldsymbol{\hat{z}}$.

4. Uma barra de comprimento a ocupa uma região onde há um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\boldsymbol{\vec{B}}$. A barra gira com velocidade angular $\boldsymbol{\vec{\omega}}$, em torno de um ponto fixo em uma de suas extremidades, em um plano perpendicular ao campo. Qual é o módulo da tensão ou da diferença de potencial que acaba se estabelecendo entre as extremidades da barra?

(a) $\omega a^2 B/4$.
(b) $2\omega a^2 B$.
(c) $\omega a^2 B$.
(d) $\omega a^2 B/2$.
(e) $2\pi\omega a^2 B$.
(f) $\pi\omega a^2 B$.
(g) 0.

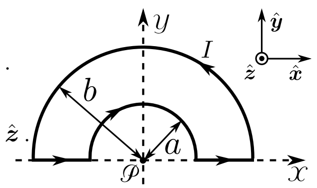
5. Considere as seguintes três afirmações sobre a lei de Ampère: (I) ela só vale quando há um alto grau de simetria da distribuição de correntes; (II) ela só vale quando as correntes forem estacionárias, e (III) ela só vale quando os campos magnéticos forem estacionários. Assinale a alternativa que indica qual(is) de tais afirmações é(são) correta(s).

(a) Nenhuma afirmação é correta.
(b) Somente a I.
(c) Somente a II.
(d) Somente a III.
(e) Somente a I e a II.
(f) Somente a I e a III.
(g) Somente a II e a III.
(h) Todas as afirmações são corretas.

6. Seja um solenóide longo, formado por um enrolamento de espiras circulares. Considere as seguintes três afirmativas sobre sua auto-indutância: (I) ela é proporcional ao quadrado do raio das espiras; (II) ela é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) ela é proporcional à corrente que circula no solenóide. Assinale a opção que indica qual(is) dessas afirmativas está(ão) correta(s).

(a) Nenhuma das afirmativas está correta.
(b) Apenas a I.
(c) Apenas a II.
(d) Apenas a III.
(e) Apenas a I e a II.
(f) Apenas a I e a III.
(g) Apenas a II e a III.
(h) Todas as afirmativas estão corretas.

7. Calcule o campo magnético no ponto $\mathscr{P}$ devido ao circuito com corrente estacionária de intensidade I.



(a) $-\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\boldsymbol{\hat{z}}$.
(b) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\boldsymbol{\hat{z}}$.
(c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\boldsymbol{\hat{z}}$.
(d) $\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\boldsymbol{\hat{z}}$.
(e) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\boldsymbol{\hat{z}}$.
(f) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\boldsymbol{\hat{z}}$.
(g) $-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\boldsymbol{\hat{z}}$.
(h) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\boldsymbol{\hat{z}}$.

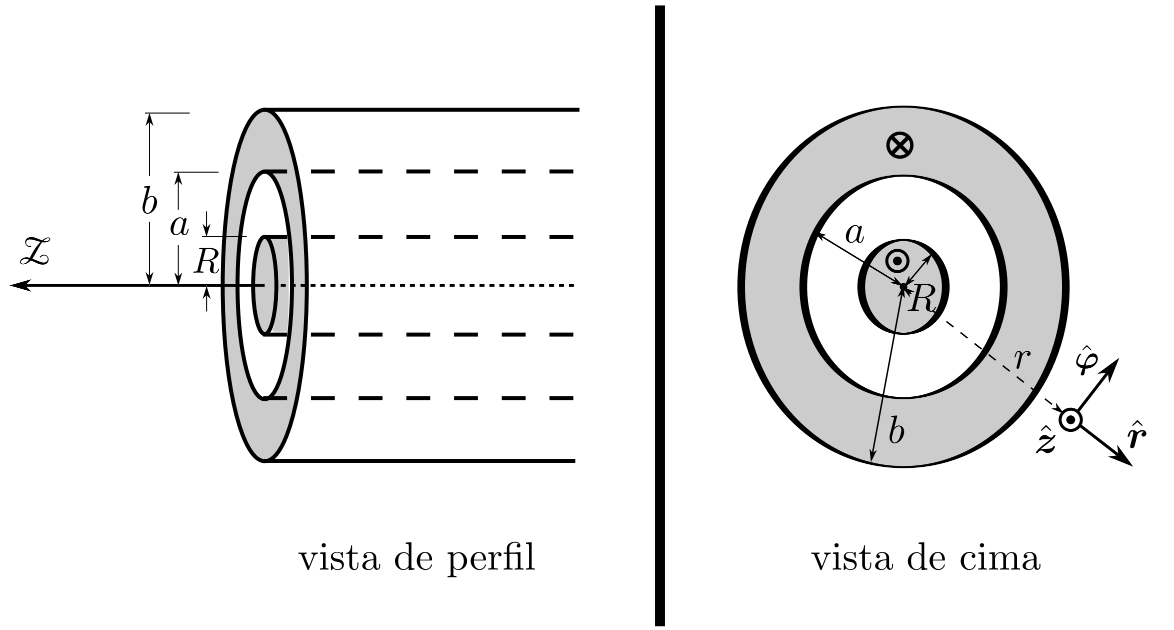
8. Todas as partículas carregadas que passam através de uma região em que existem campos elétrico e magnético constantes, ortogonais, sem serem defletidas têm em comum

(a) a massa.
(b) o momento linear.
(c) a velocidade.
(d) a energia.
(e) a razão entre carga e massa.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,6 pontos] Um cabo coaxial é composto por um fio sólido, cilíndrico, circular, de raio R, envolto por uma casca espessa, cilíndrica, também circular, coaxial, de raios a e b, tais que $R < a < b$. Ambos os cilindros são muito longos e têm o eixo comum $\mathcal{Z}$. Através do fio interno, passa uma corrente elétrica estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\boldsymbol{\vec{J}}_{\text{int}} = Cr\,\boldsymbol{\hat{z}}$, onde $C =$ const > 0 e r é a distância até o eixo do fio. Através da casca externa, passa uma corrente estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\boldsymbol{\vec{J}}_{\text{ext}} = -J_0\,\boldsymbol{\hat{z}}$, onde $J_0 =$ const > 0.

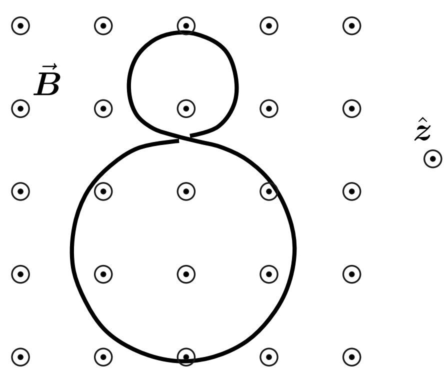


(a) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica no fio interno? [0,6 ponto]
(b) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica na casca externa? [0,4 ponto]
(c) Determine o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ em cada uma das quatro regiões em que o cabo "divide" o espaço. [1,6 ponto]

2. [2,6 pontos] Um pedaço de fio condutor ôhmico isolado é torcido de modo a constituir um circuito em forma de oito. Por razão de simplicidade, modele as duas metades da figura de oito como circunferências de círculo. O raio do círculo superior é a e o do inferior é $2a$. O circuito completo é puramente resistivo (com capacitância e auto-indutância desprezíveis), tendo resistência R. A partir de $t = 0$ s, um campo magnético uniforme, mas não estacionário,

$$\vec{\boldsymbol{B}} = Ct\,\hat{\boldsymbol{z}}\,,$$

onde $C =$ const > 0, é aplicado perpendicularmente ao plano dos dois círculos, conforme mostrado na figura.



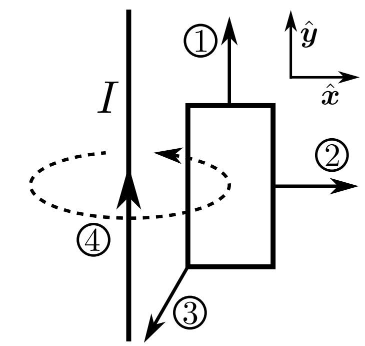
(a) Para $t > 0$ s, determine o fluxo total através do circuito. [1,2 ponto]
(b) Para $t > 0$ s, determine o sentido da corrente elétrica induzida ao longo do fio, indicando-o claramente **em cada uma das circunferências**, seja por intermédio de uma seta, seja pelas expressões horário ou anti-horário. [0,6 ponto]
(c) Para $t > 0$ s, determine o módulo da intensidade da corrente elétrica induzida no fio. [0,8 ponto]

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Um capacitor de placas paralelas, circulares e cujo raio das placas é muito maior que a distância entre as mesmas está inicialmente descarregado. A partir de um certo instante, o capacitor começa a ser carregado por uma corrente que cresce linearmente com o tempo $i(t) = bt$, onde $b =$ const > 0. Sobre os campos elétrico e magnético que podem eventualmente surgir entre as placas durante o carregamento do capacitor pode-se afirmar que:

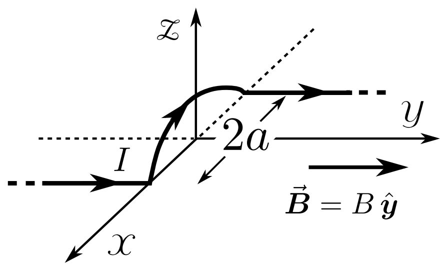
   (a) surgirá apenas um campo elétrico estacionário.
   (b) surgirão um campo elétrico estacionário e um campo magnético não estacionário, colineares entre si.
   (c) surgirá apenas um campo elétrico não estacionário.
   (d) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, colineares entre si.
   (e) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, perpendiculares entre si.
   $\boxed{\text{(f)}}$ surgirão um campo elétrico e um campo magnético, ambos não estacionários, e perpendiculares entre si.

2. Por um fio retilíneo, muito longo, em repouso, passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I. Próximo a tal fio, há um retângulo condutor, rígido, coplanar com o fio, conforme mostra a figura. Originalmente, o retângulo também encontra-se em repouso, mas, em um certo instante, ele passa a se movimentar em uma das quatro maneiras seguintes: (1) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = v_1\hat{\boldsymbol{y}}$; (2) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = v_2\hat{\boldsymbol{x}}$; (3) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = v_{3x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{3y}\hat{\boldsymbol{y}}$, ou (4) rotação (rígida) em torno do eixo do próprio fio, com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Em qual(is) das quatro situações, **não** surge uma corrente elétrica induzida ao longo do retângulo?



   (a) Somente em 1.
   (b) Somente em 4.
   (c) Somente em 2.
   (d) Somente em 3.
   $\boxed{\text{(e)}}$ Em 1 e 4.
   (f) Em 2 e 3.
   (g) Em nenhuma surgirá corrente induzida, pois o campo gerado pelo fio, mantém-se estacionário e a ŕea do retângulo não varia.

3. Calcule a força magnética resultante sobre o pedaço de fio, através do qual passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I, composto por dois segmentos retilíneos, de comprimento L, muito grande, e uma semicircunferência de círculo, de raio a, na presença de um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{y}}$, $B = \text{ const} > 0$.



(a) $2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
$\boxed{\text{(b)}}$ $-2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(c) $2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(d) $-2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(e) $2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(f) $-2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(g) $2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(h) $-2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.

4. Uma barra de comprimento a ocupa uma região onde há um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}}$. A barra gira com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, em torno de um ponto fixo em uma de suas extremidades, em um plano perpendicular ao campo. Qual é o módulo da tensão ou da diferença de potencial que acaba se estabelecendo entre as extremidades da barra?

(a) $\omega a^2 B/4$.
(b) $2\omega a^2 B$.
(c) $\omega a^2 B$.
$\boxed{\text{(d)}}$ $\omega a^2 B/2$.
(e) $2\pi\omega a^2 B$.
(f) $\pi\omega a^2 B$.
(g) 0.

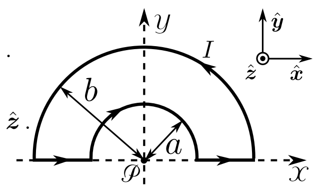
5. Considere as seguintes três afirmações sobre a lei de Ampère: (I) ela só vale quando há um alto grau de simetria da distribuição de correntes; (II) ela só vale quando as correntes forem estacionárias, e (III) ela só vale quando os campos magnéticos forem estacionários. Assinale a alternativa que indica qual(is) de tais afirmações é(são) correta(s).

$\boxed{\text{(a)}}$ Nenhuma afirmação é correta.
(b) Somente a I.
(c) Somente a II.
(d) Somente a III.
(e) Somente a I e a II.
(f) Somente a I e a III.
$\boxed{\text{(g)}}$ Somente a II e a III.
(h) Todas as afirmações são corretas.

6. Seja um solenóide longo, formado por um enrolamento de espiras circulares. Considere as seguintes três afirmativas sobre sua auto-indutância: (I) ela é proporcional ao quadrado do raio das espiras; (II) ela é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) ela é proporcional à corrente que circula no solenóide. Assinale a opção que indica qual(is) dessas afirmativas está(ão) correta(s).

(a) Nenhuma das afirmativas está correta.
$\boxed{\text{(b)}}$ Apenas a I.
(c) Apenas a II.
(d) Apenas a III.
(e) Apenas a I e a II.
(f) Apenas a I e a III.
(g) Apenas a II e a III.
(h) Todas as afirmativas estão corretas.

7. Calcule o campo magnético no ponto $\mathscr{P}$ devido ao circuito com corrente estacionária de intensidade I.



$\boxed{\text{(a)}}$ $-\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(b) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(d) $\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(e) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(f) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(g) $-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(h) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.

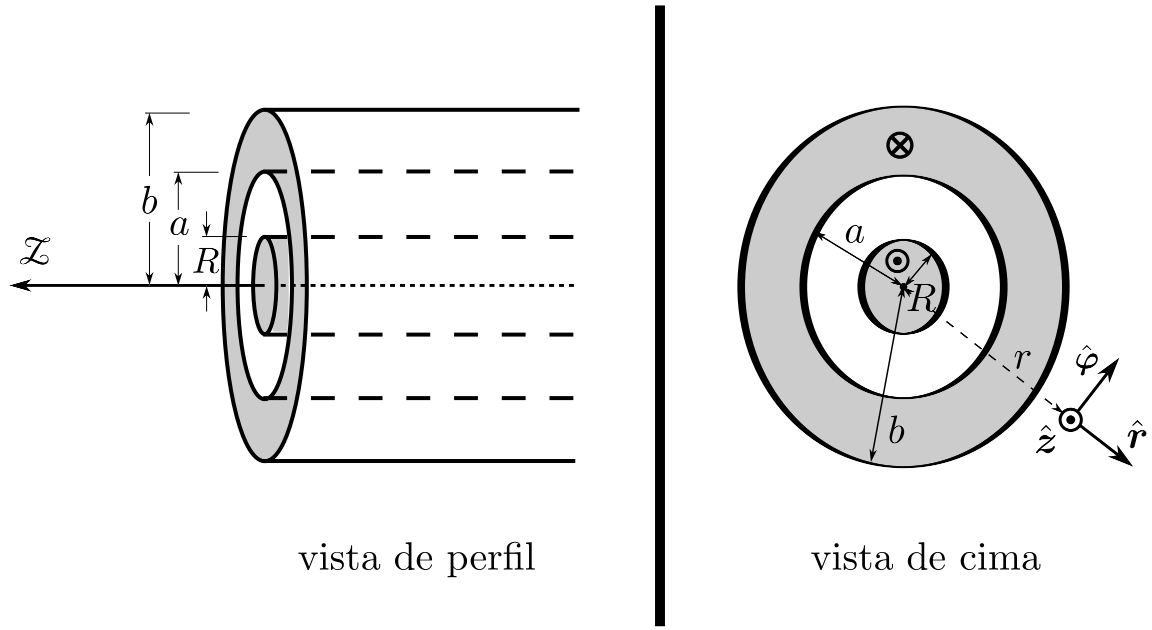
8. Todas as partículas carregadas que passam através de uma região em que existem campos elétrico e magnético constantes, ortogonais, sem serem defletidas têm em comum

(a) a massa.
(b) o momento linear.
$\boxed{\text{(c)}}$ a velocidade.
(d) a energia.
(e) a razão entre carga e massa.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,6 pontos] Um cabo coaxial é composto por um fio sólido, cilíndrico, circular, de raio R, envolto por uma casca espessa, cilíndrica, também circular, coaxial, de raios a e b, tais que $R < a < b$. Ambos os cilindros são muito longos e têm o eixo comum $\mathcal{Z}$. Através do fio interno, passa uma corrente elétrica estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{int}} = Cr\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $C = \text{ const} > 0$ e r é a distância até o eixo do fio. Através da casca externa, passa uma corrente estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{ext}} = -J_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $J_0 = \text{ const} > 0$.



(a) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica no fio interno? [0,6 ponto]
(b) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica na casca externa? [0,4 ponto]
(c) Determine o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ em cada uma das quatro regiões em que o cabo "divide" o espaço. [1,6 ponto]

Resolução:

(a) [0,6] A intensidade de corrrente elétrica $I[\mathcal{S}]$ através de uma superfície $\mathcal{S}$ e a densidade de corrente elétrica nela, $\vec{\boldsymbol{J}}$, estão relacionadas por

$$I[\mathcal{S}] = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA\,.$$

Logo, para uma seção reta do fio interno, temos

$$\begin{aligned} I_{\text{int}} &= \int_{\mathcal{S}_{\text{int}}} Cr\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\text{int}}} Cr\, 2\pi r\, dr \\ &= 2\pi C \int_{r=0}^{R} r^2\, dr\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{int}} = \frac{2}{3}\pi C R^3\,.} \tag{1}$$

■

(b) [0,4] Na casca externa, temos

$$\begin{aligned} I_{\text{ext}} &= \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} J_{\text{ext}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} (-J_0\, \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dA \\ &= -J_0 \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} dA \\ &= -J_0 A_{\text{ext}}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ext}} = -J_0\pi(b^2 - a^2)\,.} \tag{2}$$

■

(c) [1,6] Devido à simetria cilíndrica da distribuição estacionária de corrente e à lei de Gauss do magnetismo, em qualquer uma das quatro regiões, o campo magnético, só terá componente azimutal (circular), ou seja,[3]

$$\vec{\boldsymbol{B}}(r,\varphi) = B_\varphi(r)\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)\,.$$

Isso tudo sugere, pois, que usemos a lei de Ampère e que tomemos, como curva ampèriana, uma circunferência de círculo, concêntrico com o eixo da distribuição de corrente e perpendicular ao seu eixo, de raio genérico r. Assim, a expressão funcional para a circulação do campo magnético ao longo da ampériana fica, em qualquer uma das quatro regiões, igual a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathcal{C}] &:= \oint_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} B_\varphi(r)\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) \cdot d\ell_\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} B_\varphi(r) d\ell_\varphi \\ &= B_\varphi(r) \oint_{\mathcal{C}} d\ell_\varphi\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathcal{C}] = 2\pi r B_\varphi(r)\,.$$

A intensidade de corrente encerrada pela curva ampèriana dependerá, contudo, da região em questão. De fato,

- $\underline{0 \le r \le R}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela Eq. (1), contanto que, nela, troquemos R por r, ou seja:

$$\begin{aligned} I_{enc}(r) &= I_{\text{int}}(r) \\ &= \frac{2}{3}\pi C r^3\,. \end{aligned}$$

Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r) 2\pi r = \frac{2}{3}\mu_0 \pi C r^3\,,$$

e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{3}\mu_0 C r^2\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

[3]A rigor, ainda poderia haver uma componente axial constante, que, suporemos nula, como usual.

- $\underline{R \leq r \leq a}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\rm enc}(r)$ é dada pela corrente toda do fio interno, ou seja, pela Eq. (1):

$$\begin{aligned} I_{\rm enc}(r) &= I_{\rm int} \\ &= \frac{2}{3}\pi C R^3 \,. \end{aligned}$$

Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r) 2\pi r = \frac{2}{3}\mu_0 \pi C R^3 \,,$$

e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I_{\rm int}}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{3}\frac{\mu_0 C R^3}{r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

- $\underline{a \leq r \leq b}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\rm enc}(r)$ é dada pela corrente do fio interno mais a corrente na casca externa, Eq, (2), contanto que, nessa última, troquemos b por r, ou seja:

$$\begin{aligned} I_{\rm enc}(r) &= I_{\rm int} + I_{\rm ext}(r) \\ &= \frac{2}{3}\pi C R^3 - J_0 \pi (r^2 - a^2) \,. \end{aligned}$$

Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r) 2\pi r = \mu_0 \pi \left[\frac{2}{3}\pi C R^3 - J_0 (r^2 - a^2)\right] \,,$$

e, finalmente,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \left[\frac{1}{3}\frac{C R^3}{r} - \frac{1}{2} J_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\right]\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

- $\underline{b \leq r < \infty}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\rm enc}(r)$ é dada pela corrente total, Eq. (1) + Eq. (2), do fio interno mais a corrente na casca externa, ou seja:

$$I_{\rm enc}(r) = I_{\rm int} + I_{\rm ext} \,.$$

Então, pela lei de Ampère, vem

$$B_\varphi(r) 2\pi r = \mu_0 (I_{\rm int} + I_{\rm ext}) \,,$$

e, finalmente,

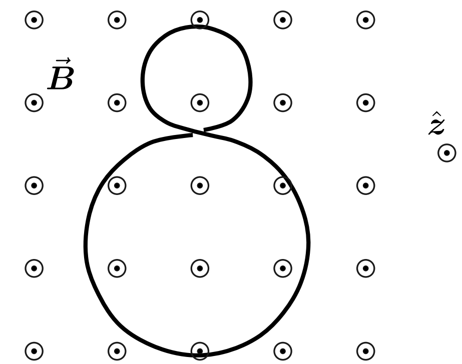
$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \frac{I_{\rm int} + I_{\rm ext}}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}$$

■

2. [2,6 pontos] Um pedaço de fio condutor ôhmico isolado é torcido de modo a constituir um circuito em forma de oito. Por razão de simplicidade, modele as duas metades da figura de oito como circunferências de círculo. O raio do círculo superior é a e o do inferior é $2a$. O circuito completo é puramente resistivo (com capacitância e auto-indutância desprezíveis), tendo resistência R. A partir de $t = 0$ s, um campo magnético uniforme, mas não estacionário,

$$\vec{\boldsymbol{B}} = C t\, \hat{\boldsymbol{z}} \,,$$

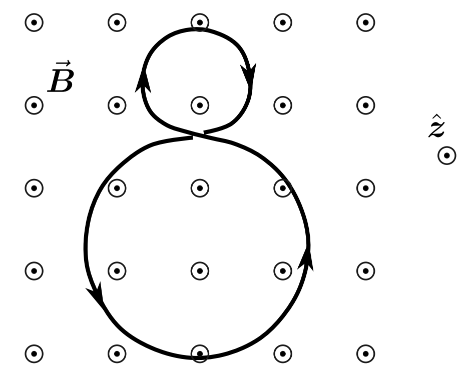
onde $C = $ const > 0, é aplicado perpendicularmente ao plano dos dois círculos, conforme mostrado na figura.



(a) Para $t > 0$ s, determine o fluxo total através do circuito. [1,2 ponto]
(b) Para $t > 0$ s, determine o sentido da corrente elétrica induzida ao longo do fio, indicando-o claramente **em cada uma das circunferências**, seja por intermédio de uma seta, seja pelas expressões horário ou anti-horário. [0,6 ponto]
(c) Para $t > 0$ s, determine o módulo da intensidade da corrente elétrica induzida no fio. [0,8 ponto]

Resolução:

(a) [1,2] Tomaremos como orientação positiva da curva $\mathcal{C}$ que modela o circuito aquela indicada na figura, de modo que os versores nas suas partes inferior e superior são dados por



$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}}_{\rm sup} &= -\hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{n}}_{\rm inf} &= \hat{\boldsymbol{z}} \,. \end{aligned}$$

Então, o fluxo através do círculo superior é

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{sup}} &:= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} (Ct\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\text{sup}}\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} (Ct\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (-\hat{\boldsymbol{z}})\, dA \\
&= -Ct \int_{;S_{\text{sup}}} dA \\
&= -CtA_{\text{sup}} \\
&= -\pi Cta^2 \,.
\end{aligned}$$

Analgoamente, para o fluxo através do círculo inferior, temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{inf}} &= CtA_{\text{inf}} \\
&= 4\pi Cta^2 \,.
\end{aligned}$$

Logo, o fluxo total através do circuito é

$$\Phi = \Phi_{\text{sup}} + \Phi_{\text{inf}}$$

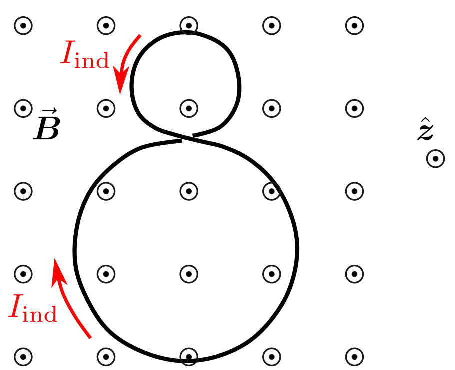
ou seja,

$$\boxed{\Phi = 3\pi Ca^2 t \,.} \tag{3}$$

■

(b) [0,6 ponto] Como, nitidamente, o módulo do fluxo está aumentando e a maior contribuição para ele vem do círculo inferior, deverá surgir, pela lei de Lenz, uma corrente induzida que parcialmente cancelará, por intermédio do correspondente campo magnético "induzido", no centro do círculo inferior, o campo magnético externo. Isso implica que a corrente induzida terá o sentido indicado pelas setas na figura a seguir, ou ainda,

- circunferência inferior: sentido **horário**
- circunferência superior: sentido **anti-horário**.



■

(c) [0,8] Pela lei de Faraday, temos que a força eletromotriz (fem) induzida ao longo do circuito é, tendo em vista a Eq. (3),

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{ind}}[\mathcal{C}] &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
&= -3\pi Ca^2 \,.
\end{aligned}$$

Como o circuito é puramente resistivo e satisfaz a lei de Ohm, temos que a corrente elétrica induzida vale

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} \,,$$

ou seja,

$$\boxed{|I_{\text{ind}}| = \frac{3\pi Ca^2}{R} \,.}$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2014/1 – Segunda Prova: 12/05/2014
Teste
VERSÃO: $\boxed{\text{D}}$

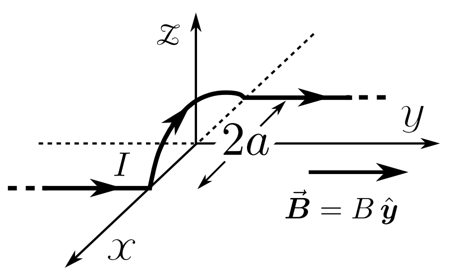
Formulário

$$\vec{F}_{\rm m} = q\vec{v}\times\vec{B}\,, \qquad d\vec{F}_{\rm m} = I d\vec{\ell}\times\vec{B}\,, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0\,, \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}\,,$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\rm enc} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_{\rm ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}\,, \qquad \Phi_B = LI\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,.$$

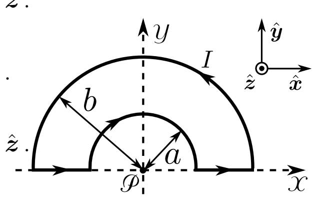
Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Calcule a força magnética resultante sobre o pedaço de fio, através do qual passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I, composto por dois segmentos retilíneos, de comprimento L, muito grande, e uma semicircunferência de círculo, de raio a, na presença de um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{B} = B\hat{\boldsymbol{y}}$, $B =$ const > 0.



(a) $2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(b) $-2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(c) $2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(d) $-2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(e) $2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(f) $-2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(g) $2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(h) $-2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.

2. Calcule o campo magnético no ponto $\mathcal{P}$ devido ao circuito com corrente estacionária de intensidade I.



(a) $-\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(b) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(d) $\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(e) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(f) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(g) $-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(h) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.

3. Uma barra de comprimento a ocupa uma região onde há um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{B}$. A barra gira com velocidade angular $\vec{\omega}$, em torno de um ponto fixo em uma de suas extremidades, em um plano perpendicular ao campo. Qual é o módulo da tensão ou da diferença de potencial que acaba se estabelecendo entre as extremidades da barra?

(a) $\omega a^2 B/4$.
(b) $2\omega a^2 B$.
(c) $\omega a^2 B$.
(d) $\omega a^2 B/2$.
(e) $2\pi\omega a^2 B$.
(f) $\pi\omega a^2 B$.
(g) 0.

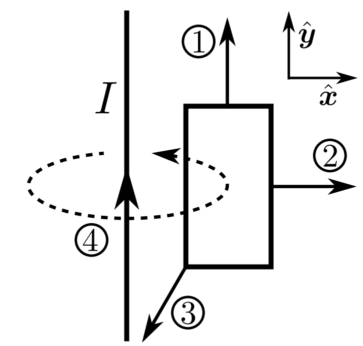
4. Todas as partículas carregadas que passam através de uma região em que existem campos elétrico e magnético constantes, ortogonais, sem serem defletidas têm em comum

(a) a massa.
(b) o momento linear.
(c) a velocidade.
(d) a energia.
(e) a razão entre carga e massa.

5. Considere as seguintes três afirmações sobre a lei de Ampère: (I) ela só vale quando há um alto grau de simetria da distribuição de correntes; (II) ela só vale quando as correntes forem estacionárias, e (III) ela só vale quando os campos magnéticos forem estacionários. Assinale a alternativa que indica qual(is) de tais afirmações é(são) correta(s).

(a) Nenhuma afirmação é correta.
(b) Somente a I.
(c) Somente a II.
(d) Somente a III.
(e) Somente a I e a II.
(f) Somente a I e a III.
(g) Somente a II e a III.
(h) Todas as afirmações são corretas.

6. Por um fio retilíneo, muito longo, em repouso, passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I. Próximo a tal fio, há um retângulo condutor, rígido, coplanar com o fio, conforme mostra a figura. Originalmente, o retângulo também encontra-se em repouso, mas, em um certo instante, ele passa a se movimentar em uma das quatro maneiras seguintes: (1) translação com velocidade $\vec{v}_1 = v_1\hat{\boldsymbol{y}}$; (2) translação com velocidade $\vec{v}_2 = v_2\hat{\boldsymbol{x}}$; (3) translação com velocidade $\vec{v}_3 = v_{3x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{3y}\hat{\boldsymbol{y}}$, ou (4) rotação (rígida) em torno do eixo do próprio fio, com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Em qual(is) das quatro situações, **não** surge uma corrente elétrica induzida ao longo do retângulo?



(a) Somente em 1.
(b) Somente em 4.
(c) Somente em 2.
(d) Somente em 3.
(e) Em 1 e 4.
(f) Em 2 e 3.
(g) Em nenhuma surgirá corrente induzida, pois o campo gerado pelo fio, mantém-se estacionário e a ŕea do retângulo não varia.

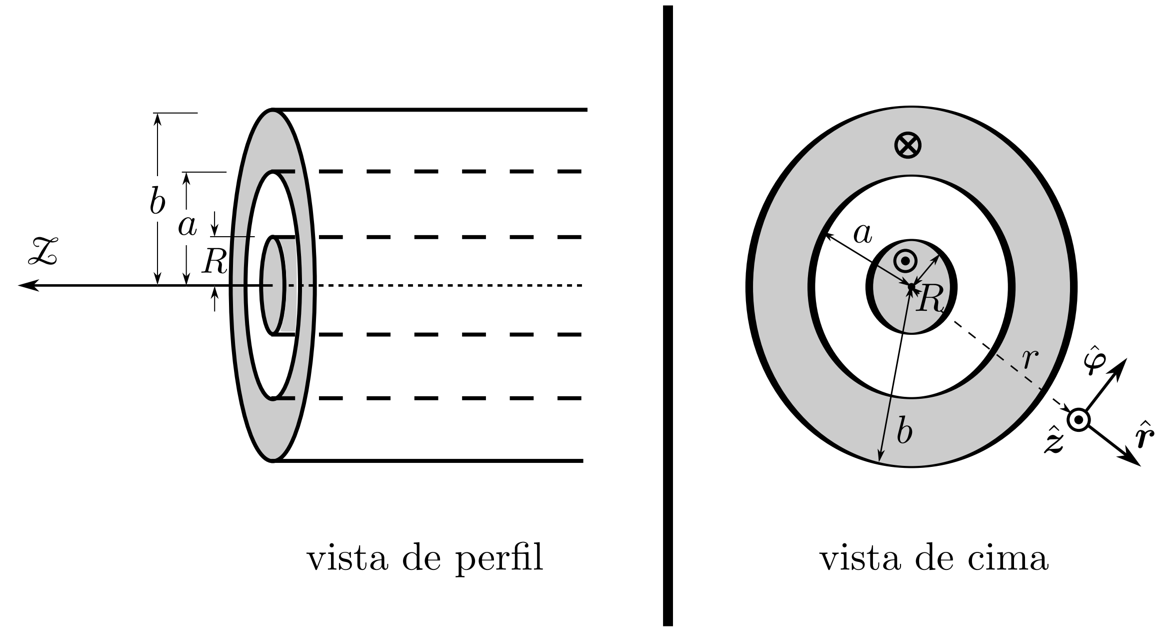
7. Um capacitor de placas paralelas, circulares e cujo raio das placas é muito maior que a distância entre as mesmas está inicialmente descarregado. A partir de um certo instante, o capacitor começa a ser carregado por uma corrente que cresce linearmente com o tempo $i(t) = bt$, onde $b =$ const > 0. Sobre os campos elétrico e magnético que podem eventualmente surgir entre as placas durante o carregamento do capacitor pode-se afirmar que:
   - (a) surgirá apenas um campo elétrico estacionário.
   - (b) surgirão um campo elétrico estacionário e um campo magnético não estacionário, colineares entre si.
   - (c) surgirá apenas um campo elétrico não estacionário.
   - (d) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, colineares entre si.
   - (e) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, perpendiculares entre si.
   - (f) surgirão um campo elétrico e um campo magnético, ambos não estacionários, e perpendiculares entre si.

8. Seja um solenóide longo, formado por um enrolamento de espiras circulares. Considere as seguintes três afirmativas sobre sua auto-indutância: (I) ela é proporcional ao quadrado do raio das espiras; (II) ela é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) ela é proporcional à corrente que circula no solenóide. Assinale a opção que indica qual(is) dessas afirmativas está(ão) correta(s).
   - (a) Nenhuma das afirmativas está correta.
   - (b) Apenas a I.
   - (c) Apenas a II.
   - (d) Apenas a III.
   - (e) Apenas a I e a II.
   - (f) Apenas a I e a III.
   - (g) Apenas a II e a III.
   - (h) Todas as afirmativas estão corretas.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

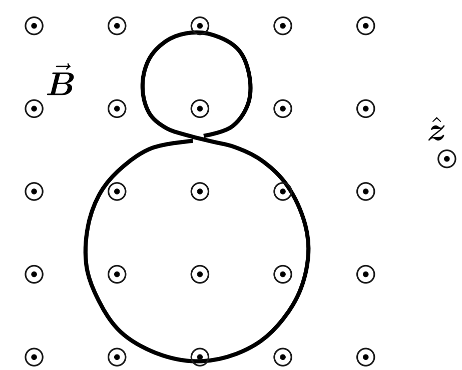
Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,6 pontos] Um cabo coaxial é composto por um fio sólido, cilíndrico, circular, de raio R, envolto por uma casca espessa, cilíndrica, também circular, coaxial, de raios a e b, tais que $R < a < b$. Ambos os cilindros são muito longos e têm o eixo comum $\mathcal{Z}$. Através do fio interno, passa uma corrente elétrica estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{int}} = Cr\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $C =$ const > 0 e r é a distância até o eixo do fio. Através da casca externa, passa uma corrente estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{ext}} = -J_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $J_0 =$ const > 0.



(a) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica no fio interno? [0,6 ponto]
(b) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica na casca externa? [0,4 ponto]
(c) Determine o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ em cada uma das quatro regiões em que o cabo "divide" o espaço. [1,6 ponto]

2. [2,6 pontos] Um pedaço de fio condutor ôhmico isolado é torcido de modo a constituir um circuito em forma de oito. Por razão de simplicidade, modele as duas metades da figura de oito como circunferências de círculo. O raio do círculo superior é a e o do inferior é $2a$. O circuito completo é puramente resistivo (com capacitância e auto-indutância desprezíveis), tendo resistência R. A partir de $t = 0$ s, um campo magnético uniforme, mas não estacionário,
$$\vec{\boldsymbol{B}} = Ct\,\hat{\boldsymbol{z}}\,,$$
onde $C =$ const > 0, é aplicado perpendicularmente ao plano dos dois círculos, conforme mostrado na figura.

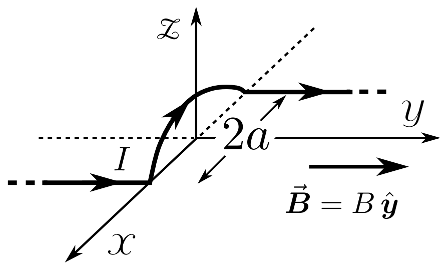


(a) Para $t > 0$ s, determine o fluxo total através do circuito. [1,2 ponto]
(b) Para $t > 0$ s, determine o sentido da corrente elétrica induzida ao longo do fio, indicando-o claramente **em cada uma das circunferências**, seja por intermédio de uma seta, seja pelas expressões horário ou anti-horário. [0,6 ponto]
(c) Para $t > 0$ s, determine o módulo da intensidade da corrente elétrica induzida no fio. [0,8 ponto]

Gabarito para Versão $\boxed{\text{D}}$

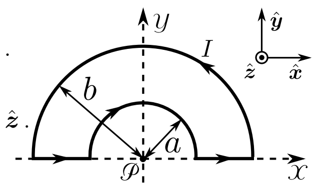
Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Calcule a força magnética resultante sobre o pedaço de fio, através do qual passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I, composto por dois segmentos retilíneos, de comprimento L, muito grande, e uma semicircunferência de círculo, de raio a, na presença de um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{y}}$, $B =$ const > 0.



(a) $2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
$\boxed{\text{(b)}}$ $-2IaB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(c) $2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(d) $-2ILB\hat{\boldsymbol{z}}$.
(e) $2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(f) $-2I(a+L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(g) $2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.
(h) $-2I(a-L)B\hat{\boldsymbol{z}}$.

2. Calcule o campo magnético no ponto $\mathscr{P}$ devido ao circuito com corrente estacionária de intensidade I.



$\boxed{\text{(a)}}$ $-\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(b) $\dfrac{\mu_0 I}{4}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(d) $\dfrac{\mu_0 I}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(e) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(f) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(g) $-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
(h) $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.

3. Uma barra de comprimento a ocupa uma região onde há um campo magnético constante (estacionário e uniforme) $\vec{\boldsymbol{B}}$. A barra gira com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, em torno de um ponto fixo em uma de suas extremidades, em um plano perpendicular ao campo. Qual é o módulo da tensão ou da diferença de potencial que acaba se estabelecendo entre as extremidades da barra?

(a) $\omega a^2 B/4$.
(b) $2\omega a^2 B$.
(c) $\omega a^2 B$.
$\boxed{\text{(d)}}$ $\omega a^2 B/2$.
(e) $2\pi\omega a^2 B$.
(f) $\pi\omega a^2 B$.
(g) 0.

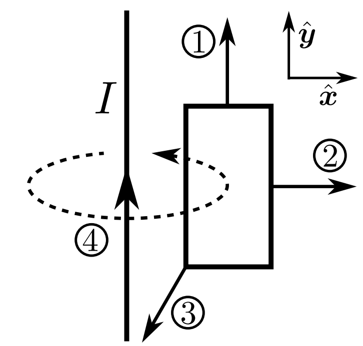
4. Todas as partículas carregadas que passam através de uma região em que existem campos elétrico e magnético constantes, ortogonais, sem serem defletidas têm em comum

(a) a massa.
(b) o momento linear.
$\boxed{\text{(c)}}$ a velocidade.
(d) a energia.
(e) a razão entre carga e massa.

5. Considere as seguintes três afirmações sobre a lei de Ampère: (I) ela só vale quando há um alto grau de simetria da distribuição de correntes; (II) ela só vale quando as correntes forem estacionárias, e (III) ela só vale quando os campos magnéticos forem estacionários. Assinale a alternativa que indica qual(is) de tais afirmações é(são) correta(s).

$\boxed{\text{(a)}}$ Nenhuma afirmação é correta.
(b) Somente a I.
(c) Somente a II.
(d) Somente a III.
(e) Somente a I e a II.
(f) Somente a I e a III.
$\boxed{\text{(g)}}$ Somente a II e a III.
(h) Todas as afirmações são corretas.

6. Por um fio retilíneo, muito longo, em repouso, passa uma corrente elétrica estacionária de intensidade I. Próximo a tal fio, há um retângulo condutor, rígido, coplanar com o fio, conforme mostra a figura. Originalmente, o retângulo também encontra-se em repouso, mas, em um certo instante, ele passa a se movimentar em uma das quatro maneiras seguintes: (1) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = v_1\hat{\boldsymbol{y}}$; (2) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = v_2\hat{\boldsymbol{x}}$; (3) translação com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = v_{3x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{3y}\hat{\boldsymbol{y}}$, ou (4) rotação (rígida) em torno do eixo do próprio fio, com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Em qual(is) das quatro situações, **não** surge uma corrente elétrica induzida ao longo do retângulo?



(a) Somente em 1.
(b) Somente em 4.
(c) Somente em 2.
(d) Somente em 3.
$\boxed{\text{(e)}}$ Em 1 e 4.
(f) Em 2 e 3.
(g) Em nenhuma surgirá corrente induzida, pois o campo gerado pelo fio, mantém-se estacionário e a ŕea do retângulo não varia.

7. Um capacitor de placas paralelas, circulares e cujo raio das placas é muito maior que a distância entre as mesmas está inicialmente descarregado. A partir de um certo instante, o capacitor começa a ser carregado por uma corrente que cresce linearmente com o tempo $i(t) = bt$, onde $b =$ const > 0. Sobre os campos elétrico e magnético que podem eventualmente surgir entre as placas durante o carregamento do capacitor pode-se afirmar que:

   (a) surgirá apenas um campo elétrico estacionário.

   (b) surgirão um campo elétrico estacionário e um campo magnético não estacionário, colineares entre si.

   (c) surgirá apenas um campo elétrico não estacionário.

   (d) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, colineares entre si.

   (e) surgirão um campo elétrico não estacionário e um campo magnético estacionário, perpendiculares entre si.

   $\boxed{\text{(f)}}$ surgirão um campo elétrico e um campo magnético, ambos não estacionários, e perpendiculares entre si.

8. Seja um solenóide longo, formado por um enrolamento de espiras circulares. Considere as seguintes três afirmativas sobre sua auto-indutância: (I) ela é proporcional ao quadrado do raio das espiras; (II) ela é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) ela é proporcional à corrente que circula no solenóide. Assinale a opção que indica qual(is) dessas afirmativas está(ão) correta(s).

   (a) Nenhuma das afirmativas está correta.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Apenas a I.

   (c) Apenas a II.

   (d) Apenas a III.

   (e) Apenas a I e a II.

   (f) Apenas a I e a III.

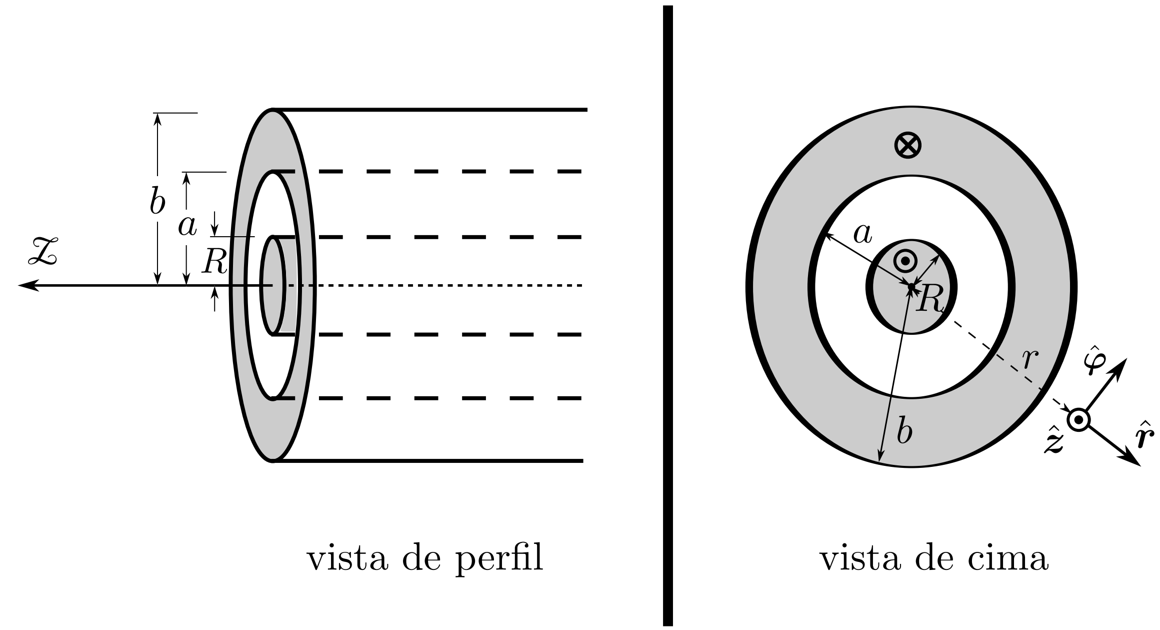
   (g) Apenas a II e a III.

   (h) Todas as afirmativas estão corretas.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

Todas as respostas devem ter justificativas!

1. [2,6 pontos] Um cabo coaxial é composto por um fio sólido, cilíndrico, circular, de raio R, envolto por uma casca espessa, cilíndrica, também circular, coaxial, de raios a e b, tais que $R < a < b$. Ambos os cilindros são muito longos e têm o eixo comum $\mathcal{Z}$. Através do fio interno, passa uma corrente elétrica estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{int}} = Cr\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $C =$ const > 0 e r é a distância até o eixo do fio. Através da casca externa, passa uma corrente estacionária, cuja densidade de corrente é dada por $\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{ext}} = -J_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$, onde $J_0 =$ const > 0.



(a) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica no fio interno? [0,6 ponto]
(b) Qual é a (intensidade de) corrente elétrica na casca externa? [0,4 ponto]
(c) Determine o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ em cada uma das quatro regiões em que o cabo "divide" o espaço. [1,6 ponto]

Resolução:

(a) [0,6] A intensidade de corrrente elétrica $I[\mathcal{S}]$ através de uma superfície $\mathcal{S}$ e a densidade de corrente elétrica nela, $\vec{\boldsymbol{J}}$, estão relacionadas por

$$I[\mathcal{S}] = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA\,.$$

Logo, para uma seção reta do fio interno, temos

$$\begin{aligned} I_{\text{int}} &= \int_{\mathcal{S}_{\text{int}}} Cr\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dA \\ &= \int_{\mathcal{S}_{\text{int}}} Cr\, 2\pi r\, dr \\ &= 2\pi C \int_{r=0}^{R} r^2\, dr\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{int}} = \frac{2}{3}\pi C R^3\,.} \tag{1}$$

■

(b) [0,4] Na casca externa, temos

$$
\begin{aligned}
I_{\text{ext}} &= \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} J_{\text{ext}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} (-J_0\, \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dA \\
&= -J_0 \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} dA \\
&= -J_0 A_{\text{ext}}\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\boxed{I_{\text{ext}} = -J_0 \pi (b^2 - a^2)\,.} \tag{2}
$$

■

(c) [1,6] Devido à simetria cilíndrica da distribuição estacionária de corrente e à lei de Gauss do magnetismo, em qualquer uma das quatro regiões, o campo magnético, só terá componente azimutal (circular), ou seja,[4]

$$
\vec{\boldsymbol{B}}(r, \varphi) = B_\varphi(r)\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)\,.
$$

Isso tudo sugere, pois, que usemos a lei de Ampère e que tomemos, como curva ampèriana, uma circunferência de círculo, concêntrico com o eixo da distribuição de corrente e perpendicular ao seu eixo, de raio genérico r. Assim, a expressão funcional para a circulação do campo magnético ao longo da ampériana fica, em qualquer uma das quatro regiões, igual a

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathcal{C}] &:= \oint_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\
&= \oint_{\mathcal{C}} B_\varphi(r)\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) \cdot d\ell_\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \oint_{\mathcal{C}} B_\varphi(r) d\ell_\varphi \\
&= B_\varphi(r) \oint_{\mathcal{C}} d\ell_\varphi\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathcal{C}] = 2\pi r B_\varphi(r)\,.
$$

A intensidade de corrente encerrada pela curva ampèriana dependerá, contudo, da região em questão. De fato,

- $\underline{0 \le r \le R}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela Eq. (1), contanto que, nela, troquemos R por r, ou seja:

$$
\begin{aligned}
I_{enc}(r) &= I_{\text{int}}(r) \\
&= \frac{2}{3}\pi C r^3\,.
\end{aligned}
$$

  Então, pela lei de Ampère, vem

$$
B_\varphi(r) 2\pi r = \frac{2}{3}\mu_0 \pi C r^3\,,
$$

  e, finalmente,

$$
\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{3}\mu_0 C r^2\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}
$$

[4] A rigor, ainda poderia haver uma componente axial constante, que, suporemos nula, como usual.

- $\underline{R \le r \le a}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela corrente toda do fio interno, ou seja, pela Eq. (1):

$$
\begin{aligned}
I_{\text{enc}}(r) &= I_{\text{int}} \\
&= \frac{2}{3}\pi C R^3\,.
\end{aligned}
$$

  Então, pela lei de Ampère, vem

$$
B_\varphi(r) 2\pi r = \frac{2}{3}\mu_0 \pi C R^3\,,
$$

  e, finalmente,

$$
\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{3}\frac{\mu_0 C R^3}{r}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}
$$

- $\underline{a \le r \le b}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela corrente do fio interno mais a corrente na casca externa, Eq. (2), contanto que, nessa última, troquemos b por r, ou seja:

$$
\begin{aligned}
I_{\text{enc}}(r) &= I_{\text{int}} + I_{\text{ext}}(r) \\
&= \frac{2}{3}\pi C R^3 - J_0 \pi (r^2 - a^2)\,.
\end{aligned}
$$

  Então, pela lei de Ampère, vem

$$
B_\varphi(r) 2\pi r = \mu_0 \pi \left[\frac{2}{3}\pi C R^3 - J_0 (r^2 - a^2)\right]\,,
$$

  e, finalmente,

$$
\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \left[\frac{1}{3}\frac{C R^3}{r} - \frac{1}{2} J_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\right]\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}
$$

- $\underline{b \le r < \infty}$: nesse caso, a corrente encerrada $I_{\text{enc}}(r)$ é dada pela corrente total, Eq. (1) + Eq. (2), do fio interno mais a corrente na casca externa, ou seja:

$$
I_{\text{enc}}(r) = I_{\text{int}} + I_{\text{ext}}\,.
$$

  Então, pela lei de Ampère, vem

$$
B_\varphi(r) 2\pi r = \mu_0 (I_{\text{int}} + I_{\text{ext}})\,,
$$

  e, finalmente,

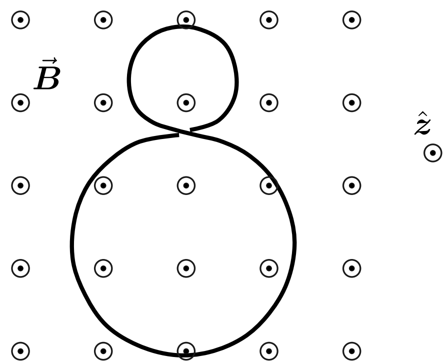
$$
\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \frac{I_{\text{int}} + I_{\text{ext}}}{2\pi r}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.}
$$

■

2. [2,6 pontos] Um pedaço de fio condutor ôhmico isolado é torcido de modo a constituir um circuito em forma de oito. Por razão de simplicidade, modele as duas metades da figura de oito como circunferências de círculo. O raio do círculo superior é a e o do inferior é $2a$. O circuito completo é puramente resistivo (com capacitância e auto-indutância desprezíveis), tendo resistência R. A partir de $t = 0$ s, um campo magnético uniforme, mas não estacionário,

$$
\vec{\boldsymbol{B}} = Ct\, \hat{\boldsymbol{z}}\,,
$$

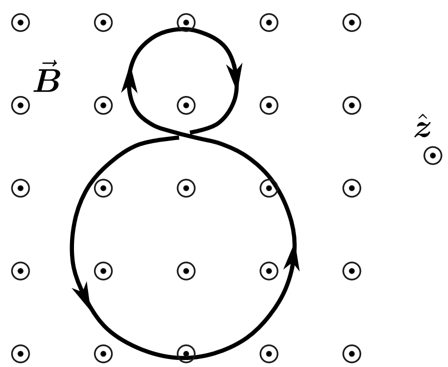
onde $C = \text{const} > 0$, é aplicado perpendicularmente ao plano dos dois círculos, conforme mostrado na figura.



(a) Para $t > 0$ s, determine o fluxo total através do circuito. [1,2 ponto]
(b) Para $t > 0$ s, determine o sentido da corrente elétrica induzida ao longo do fio, indicando-o claramente **em cada uma das circunferências**, seja por intermédio de uma seta, seja pelas expressões horário ou anti-horário. [0,6 ponto]
(c) Para $t > 0$ s, determine o módulo da intensidade da corrente elétrica induzida no fio. [0,8 ponto]

Resolução:

(a) [1,2] Tomaremos como orientação positiva da curva $\mathcal{C}$ que modela o circuito aquela indicada na figura, de modo que os versores nas suas partes inferior e superior são dados por



$$\hat{\boldsymbol{n}}_{\text{sup}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\hat{\boldsymbol{n}}_{\text{inf}} = \hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

Então, o fluxo através do círculo superior é

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{sup}} &:= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} (Ct\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\text{sup}}\, dA \\
&= \int_{\mathcal{S}_{\text{sup}}} (Ct\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (-\hat{\boldsymbol{z}})\, dA \\
&= -Ct \int_{;S_{\text{sup}}} dA \\
&= -CtA_{\text{sup}} \\
&= -\pi C t a^2\,.
\end{aligned}$$

Analgoamente, para o fluxo através do círculo inferior, temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{inf}} &= CtA_{\text{inf}} \\
&= 4\pi C t a^2\,.
\end{aligned}$$

Logo, o fluxo total através do circuito é

$$\Phi = \Phi_{\text{sup}} + \Phi_{\text{inf}}$$

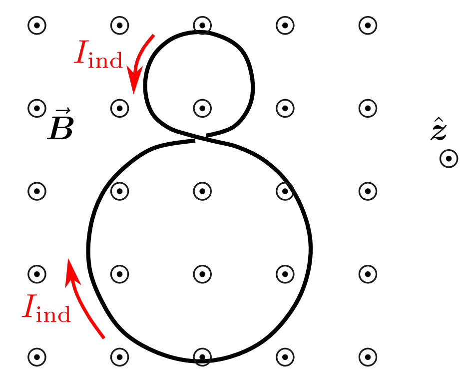
ou seja,

$$\boxed{\Phi = 3\pi C a^2 t\,.} \tag{3}$$

■

(b) [0,6 ponto] Como, nitidamente, o módulo do fluxo está aumentando e a maior contribuição para ele vem do círculo inferior, deverá surgir, pela lei de Lenz, uma corrente induzida que parcialmente cancelará, por intermédio do correspondente campo magnético “induzido”, no centro do círculo inferior, o campo magnético externo. Isso implica que a corrente induzida terá o sentido indicado pelas setas na figura a seguir, ou ainda,

- <u>circunferência inferior</u>: sentido **horário**
- <u>circunferência superior</u>: sentido **anti-horário**.



■

(c) [0,8] Pela lei de Faraday, temos que a força eletromotriz (fem) induzida ao longo do circuito é, tendo em vista a Eq. (3),

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{ind}}[C] &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -3\pi C a^2 \,.\end{aligned}$$

Como o circuito é puramente resistivo e satisfaz a lei de Ohm, temos que a corrente elétrica induzida vale

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R}\,,$$

ou seja,

$$\boxed{|I_{\text{ind}}| = \frac{3\pi C a^2}{R}\,.}$$

■